

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXIII - ANNO CXXXV

(1996)



LIGUORI EDITORE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXIII - ANNO CXXXV

(1996)

LIGUORI EDITORE

Pubblicato da Liguori Editore
Via Posillipo 394, 80123 Napoli

© Liguori Editore, S.r.l., 1997

I diritti di traduzione, riproduzione e adattamento, totale o parziale, sono riservati per tutti i Paesi. Nessuna parte di questo volume può essere riprodotta, registrata o trasmessa con qualsiasi mezzo: elettronico, elettrostatico, meccanico, fotografico, ottico o magnetico (comprese copie fotostatiche, microfilm e microfiches).

Prima edizione italiana Marzo 1997

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2003 2002 2001 2000 1999 1998 1997

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Printed in Italy, Officine Grafiche Liguori, Napoli

ISBN 88-207-2716-1

INDICE

A. Alberico, T. Ricciardi - <i>Continuity properties for linear elliptic equations with lower-order terms</i>	pag. 7
N.A. D'Auria - <i>Poisson operator for a degenerate parabolic problem</i>	» 17
M.C. Cirino Groccia, C. Musella - <i>Groups with Many complemented subgroups</i>	» 27
L. Carbone, G. Cardone, F. Palladino - <i>Le Collezioni di strumenti e modelli matematici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II"</i>	» 33
A. Verde - <i>Improving integral inequalities related to level sets</i>	» 67
T. Pescatore, F. Pinto, M. Rosaria Senatore, M. Tramutoli, A. Valente - <i>Avanfosse mioceniche dell'Appennino meridionale (Italia)</i>	» 85
R. Sersale, G. Frigione - <i>Porosità e carbonatazione di provini di malta confezionati con cementi portland e di miscela</i>	» 123
S. Rionero - <i>Alcuni aspetti della Scuola matematica napoletana: fantasia matematica e proiezione internazionale</i>	» 131
A. Feoli, G. Scarpetta - <i>Caianiello's maximal acceleration in string dynamics</i>	» 149
G. Lambiase - <i>Potenziale interquark nei modelli di stringa</i>	» 161
E. Di Nardo, E. Pirozzi, S. Rinaldi - <i>On FPT densities of normal process with an oscillatory covariance</i>	» 179

holds, where ν is a positive constant. In the framework of Lebesgue spaces the regularity theory for problem (1.1) has been widely studied, and can be found in classical references such as [St], [LU]. One of the main results is boundedness and local Hölder-continuity of u when the following conditions are satisfied for some $\epsilon > 0$:

- (i) $a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad d \in L^n(\Omega);$
- (ii) $b \in L^{n+\epsilon}(\Omega), \quad c \in L^{n/2+\epsilon}(\Omega);$
- (iii) $f \in L^{n+\epsilon}(\Omega), \quad g \in L^{n/2+\epsilon}(\Omega),$

where $b = (\sum_i b_i^2)^{1/2}$, $d = (\sum_i d_i^2)^{1/2}$, $f = (\sum_i f_i^2)^{1/2}$. If we allow $\epsilon = 0$, solutions may be discontinuous (a counterexample may be found in [LU], Chapter 1), so in terms of Lebesgue spaces conditions (ii) and (iii) may not be weakened without losing continuity.

For some special cases of (1.1), by symmetrization techniques, Alvino [Al] and Ferone [Fe] have shown boundedness and continuity of u when the coefficients and the data satisfy weaker conditions than (ii) and (iii), formulated in terms of the Lorentz spaces. Using different methods, results of the same kind have been obtained in [FF] for minimizers of integral functionals and for solutions of nonlinear equations.

Symmetrization has been extended to linear equations with all lower-order terms by Ferone and Posteraro [FP] in the case when all coefficients are bounded, and by Alvino, P.L. Lions and Trombetti [ALT] when the negative part of $-(b_j)_{x_j} + c$ is bounded, but their results yield estimates for u only when existence holds for a so-called “symmetrized problem” associated to (1.1).

Our purpose is to show how by some simple arguments one can obtain continuity results for solutions of (1.1), under assumptions which are weaker than (ii) and (iii). Such results are contained in Section 2.

In Section 3 we extend our results to the case when the matrix $[a_{ij}]$ satisfies a degenerate ellipticity condition. We refer to the papers by Murthy and Stampacchia [MS] and Trudinger [Tr] for the basic theory of degenerate elliptic equations, and to Alvino and Trombetti [AT] and Betta [Be] for sharp estimates obtained via symmetrization.

2. Main results

First of all, let us briefly define the Lorentz spaces (see e.g. [BR] for more details).

For any measurable function φ defined in Ω , let us denote by

$$\varphi^*(s) = \sup\{t > 0 : |\{x \in \Omega : |\varphi(x)| > t\}| > s\}$$

the decreasing rearrangement of φ , and by

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi^*(s) ds$$

the average function of φ .

Then φ belongs to the Lorentz space $L^{p,q}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, if and only if

$$\|\varphi\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^{|\Omega|} (\bar{\varphi}(t)t^{1/p})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} & \text{if } 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t>0} \bar{\varphi}(t)t^{1/p} & \text{if } q = \infty \end{cases}$$

is finite.

The Lorentz spaces interpolate the Lebesgue spaces, and the following embeddings hold:

$$(2.1) \quad \begin{cases} L^p(\Omega) \subset L^{r,q}(\Omega) \subset L^r(\Omega) & \text{if } 1 < r < p, \quad 1 \leq q < r; \\ L^r(\Omega) \subset L^{r,q}(\Omega) \subset L^t(\Omega) & \text{if } t < r, \quad r < q \leq \infty. \end{cases}$$

We prove the following theorems:

Theorem 2.1. *Let $u \in H_0^1(\Omega)$ be a solution of problem (1.1) under assumptions (1.2), (i), (ii) and*

$$(iii)' \quad f \in L^{n,1}(\Omega), \quad g \in L^{n/2,1}(\Omega).$$

Then u is continuous in Ω .

Remark 2.1. We restrict ourselves to the case of homogeneous boundary data for simplicity, but actually the proof of Theorem 2.1 yields continuity for local solutions of the equation

$$Lu = (f_i)_{x_i} + g \quad \text{in } \Omega$$

when hypotheses (i), (ii) and (iii)' are satisfied.

Theorem 2.2. *Let $u \in H_0^1(\Omega)$ be a solution of problem (1.1) under assumptions (1.2), (i), (iii)' and*

$$(ii)' \quad b \in L^{n,1}(\Omega), \quad c \in L^{n/2,1}(\Omega).$$

Moreover, suppose that u is unique. Then u is bounded and continuous in Ω .

Remark 2.2. Embedding properties (2.1) show that conditions (ii)' and (iii)' are indeed weaker than the classical conditions (ii) and (iii), respectively.

Remark 2.3. As counterexamples in [Fe] show, local Hölder-continuity may not be expected under the hypotheses of Theorems 2.1 and 2.2.

For the proofs, we shall need the following two lemmas. The first one is essentially contained in [Al], when $f = 0$ and in [Fe], when $g = 0$.

Lemma 2.1. *Suppose $u \in H_0^1(\Omega)$ is a solution of problem (1.1) where $b = c = 0$ and conditions (1.2), (i) and (iii)' are satisfied. Then u is bounded and continuous in Ω and there exists $C_1 = C_1(n, \|d\|_n)$ such that*

$$\|u\|_\infty \leq C_1(\|f\|_{n,1} + \|g\|_{n/2,1}).$$

Lemma 2.2. *Suppose $u \in H_0^1(\Omega)$ is the unique solution of problem (1.1) under assumptions (1.2), (i), (ii)' and (iii)'. If $\|b\|_{n,1}$ and $\|c\|_{n/2,1}$ are sufficiently small, then u is bounded and continuous in Ω .*

PROOF. We consider the operator

$$L_o v = -(a_{ij} v_{x_i})_{x_j} + d_i v_{x_i},$$

which by maximum principle is bicontinuous from $H_0^1(\Omega)$ onto $H^{-1}(\Omega)$. Let us denote by G_o its inverse, and by $C_b(\Omega)$ the Banach space of bounded and continuous functions, equipped with the sup-norm. The operator

$$(2.2) \quad T v = G_o[(b_i v + f_i)_{x_i} - c v + g].$$

is a well-defined mapping of C_b into itself, by Lemma 2.1. Clearly, the continuity of the unique solution of (1.1) is equivalent to the existence of a fixed point for T .

But it is easily seen that T is a contraction if

$$\|b\|_{n,1} + \|c\|_{n/2,1} < \frac{1}{C_1},$$

as by Lemma 2.1 the following estimates hold:

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\|_\infty &= \|G_o[(b_j(u-v))_{x_j} - c(u-v)]\|_\infty \leq \\ &\leq C_1(\|b(u-v)\|_{n,1} + \|c(u-v)\|_{n/2,1}) \leq \\ &\leq C_1(\|b\|_{n,1} + \|c\|_{n/2,1})\|u-v\|_\infty. \blacksquare \end{aligned}$$

PROOF OF THEOREM 2.1. We fix $x_0 \in \Omega$ and a ball $B \subset \Omega$ centered in x_0 such that uniqueness holds in B and

$$(2.3) \quad \|b\chi_B\|_{n,1} + \|c\chi_B\|_{n/2,1} < \frac{1}{C_1},$$

where χ_B is the characteristic function of B . In B we can write $u = v + w$, where v is the unique solution of

$$\begin{cases} Lv = 0 & \text{in } B \\ v - u \in H_0^1(B), \end{cases}$$

and w is the unique solution of

$$\begin{cases} Lw = (f_i)_{x_i} + g & \text{in } B \\ w \in H_0^1(B). \end{cases}$$

Then, since v is locally Hölder-continuous in B by classical theory and w is bounded and continuous in B by Lemma 2.2, theorem follows. ■

PROOF OF THEOREM 2.2. We use a partition of unity argument. Let $\{B_k\}_{k=1}^l$ be an open covering of Ω by balls, such that $\|b\chi_k\|_{n,1}$ and $\|c\chi_k\|_{n/2,1}$ are small enough in the sense of Lemma 2.2, where χ_k is the characteristic function of $\Omega_k = B_k \cap \Omega$, and such that uniqueness holds in Ω_k for every k . The functions

$$\zeta_k(x) = \frac{\chi_k(x)}{\sum_{k=1}^l \chi_k(x)}, \quad x \in \Omega$$

satisfy $0 \leq \zeta_k(x) \leq 1$ and $\sum_k \zeta_k(x) = 1$. Let

$$\begin{cases} Lu_k = (f_i \zeta_k)_{x_i} + g \zeta_k & \text{in } \Omega \\ u_k \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Then

$$v = \sum_k u_k$$

satisfies (1.1), so by uniqueness

$$u = v.$$

By Lemma 2.2 each u_k is bounded and continuous in Ω , hence u is bounded and continuous in Ω and the statement is proved. ■

3. The degenerate case

Let us substitute ellipticity condition (1.2) by the following :

$$(3.1) \quad a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu(x) |\xi|^2 \quad a.e. \text{ in } \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

where $\nu \geq 0$ is a nonnegative measurable function defined in Ω . Then the natural generalization of (1.1) is the following degenerate Dirichlet problem:

$$(3.2) \quad \begin{cases} Lu = (f_i)_{x_i} + g & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^1(\nu), \end{cases}$$

where $H_0^1(\nu) = H_0^1(\Omega, \nu)$ is the completion of $C_0^1(\Omega)$ with respect to the norm

$$\|u\|_{H^1(\nu)} = \left(\int_{\Omega} u^2 \nu dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} |Du|^2 \nu dx \right)^{1/2}.$$

It is well-known (see [MS] and [Tr]) that the solution u is Hölder-continuous under assumptions (3.1) and the following:

$$(3.3) \quad \nu \in L^s(\Omega), \quad \nu^{-1} \in L^t(\Omega), \quad t > n, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{t} \leq \frac{2}{n};$$

$$(j) \quad a_{ij} \nu^{-1} \in L^\infty(\Omega), \quad d\nu^{-1/2} \in L^r(\Omega);$$

$$(jj) \quad b\nu^{-1/2} \in L^{r+\epsilon}(\Omega), \quad c \in L^{r/2+\epsilon}(\Omega);$$

$$(jjj) \quad f\nu^{-1/2} \in L^{r+\epsilon}(\Omega), \quad g \in L^{r/2+\epsilon}(\Omega),$$

where $r^{-1} = n^{-1} - (2t)^{-1}$ and $\epsilon > 0$.

By essentially the same arguments as in Section 2, conditions (jj) and (jjj) can be weakened, without losing boundedness and continuity of the solution u . The analogues of Lemmas 2.1 and 2.2 for the degenerate case are stated here below.

Lemma 3.1. *Let u be a solution of the problem (3.2) where $b = c = 0$ and conditions (3.1), (3.3), (j) and*

$$(jjj)' \quad f\nu^{-1/2} \in L^{r, 2t/(2t-1)}(\Omega), \quad g \in L^{r/2, t/(t-1)}(\Omega)$$

are satisfied. Then u is continuous and bounded in Ω and the estimate

$$(3.4) \quad \|u\|_{\infty} \leq C_2(\|f\nu^{-1/2}\|_{r, 2t/(2t-1)} + \|g\|_{r/2, t/(t-1)})$$

holds, where C_2 depends on $n, \|\nu^{-1}\|_t, \|d\nu^{-1/2}\|_r$.

PROOF. The proof of the a priori estimate (3.4) is contained in Theorem 3.1 in [Be]. For the continuity, we fix $x_0 \in \Omega$ and denote for $\rho > 0$, $B_{\rho}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho\}$. We take ρ such that $B_{8\rho}(x_0) \subset \Omega$, and we put $u = v + w$, where v is the solution of the problem:

$$(3.5) \quad \begin{cases} -(a_{ij}(x)v_{x_j})_{x_i} + d_iv_{x_i} = (f_{x_i})_{x_j} + g & \text{in } B_{8\rho}(x_0) \\ v \in H_0^1(B_{8\rho}(x_0), \nu) \end{cases}$$

and w is the solution of the problem:

$$\begin{cases} -(a_{ij}(x)w_{x_j})_{x_i} + d_iw_{x_i} = 0 & \text{in } B_{8\rho}(x_0) \\ w - u \in H_0^1(B_{8\rho}(x_0), \nu). \end{cases}$$

Denoting by $osc(w, \rho)$ the oscillation of $w(x)$ in $B_{\rho}(x_0)$, we have by Theorem 11.2 in [MS] that a constant $\eta < 1$ exists, such that

$$(3.6) \quad osc(w, \rho) \leq \eta osc(w, 4\rho).$$

Furthermore, as the estimate (3.4) may be applied to the solution v of (3.5), we have

$$(3.7) \quad \text{osc}(v, \rho) \leq \text{osc}(v, 4\rho) \leq 2\|v\|_\infty \leq F(\rho),$$

where

$$F(\rho) = 2C_2(\|f\nu^{-1/2}\chi_{B_{8\rho}(x_0)}\|_{r,2t/(2t-1)} + \|g\chi_{B_{8\rho}(x_0)}\|_{r/2,t/(t-1)})$$

is a function such that $F(\rho) \rightarrow 0$ as $\rho \rightarrow 0$. Then from (3.6) and (3.7) we get

$$\begin{aligned} \text{osc}(u, \rho) &\leq \eta \text{osc}(w, 4\rho) + F(\rho) \leq \\ &\leq \eta \text{osc}(u, 4\rho) + (\eta + 1)F(\rho) \end{aligned}$$

and continuity of u follows. ■

Lemma 3.2. *Suppose u is the unique solution of problem (3.2) under assumptions (3.1), (3.3), (j), (jjj)' and*

$$(jjj)' \quad b\nu^{-1/2} \in L^{r,2t/(2t-1)}(\Omega), \quad c \in L^{r/2,t/(t-1)}(\Omega).$$

If $\|b\nu^{-1/2}\|_{r,2t/(2t-1)}$ and $\|c\|_{r/2,t/(t-1)}$ are sufficiently small, then u is bounded and continuous in Ω .

SKETCH OF PROOF. Using the same arguments as in Lemma 2.2, we consider the operator

$$L_o u = -(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + d_i u_{x_i},$$

which by maximum principle is bicontinuous from $H_0^1(\nu)$ onto $H^{-1}(\nu^{-1})$. If we denote by G_o its inverse, and by T the operator as in (2.2), the proof follows as in Lemma 2.2. ■

We obtain the following theorems:

Theorem 3.1. *Suppose u is a solution of (3.2) under assumptions (3.1), (3.3), (j), (jj) and (jjj)'. Then u is continuous in Ω .*

Theorem 3.2. *Suppose u is a solution of (3.2) under assumptions (3.1), (3.3), (j), (jj)' and (jjj)'. Moreover, suppose that u is unique. Then u is bounded and continuous in Ω .*

Remark 3.1. We observe that conditions $(jj)'$ and $(jjj)'$ are indeed weaker than conditions (jj) and (jjj) , respectively, by the embedding properties (2.1).

REFERENCES

- [Al] A. ALVINO, "Formule di maggiorazione e regolarizzazione per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine in un caso limite", *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, (8) **52**, p.335-340, (1977).
- [ALT] A. ALVINO - P.L. LIONS - G. TROMBETTI, "Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization", *Ann. Inst. Henri Poincaré*, (2) **7**, p.37-65, (1990).
- [AT] A. ALVINO - G. TROMBETTI, "Sulle migliori costanti di maggiorazione per una classe di equazioni ellittiche degeneri", *Ricerche Mat.*, **27**, p.413-428, (1978).
- [BR] C. BENNETT - K. RUDNICK, "On Lorentz-Zygmund spaces", *Dissert. Math.*, **175**, p.1-67, (1980).
- [Be] M.F. BETTA, "Estimates for solutions of nonlinear degenerate elliptic equations", to appear on *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*.
- [Fe] V. FERONE, "Estimates and Regularity for Solutions of Elliptic Equations in a Limit Case", *Boll. U.M.I.*, (7) **8-B**, p.257-270, (1994).
- [FF] V. FERONE - N. FUSCO, "Continuity properties of minimizers of integral functionals", to appear on *J. Math. Anal. Appl.*
- [FP] V. FERONE - M.R. POSTERARO, "Symmetrization Results for Elliptic Equations with Lower-Order Terms", *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, **XL**, p.47-61, (1992).
- [LU] O.A. LADYZHENSKAJA - N.N. URAL'CEVA, *Équations aux dérivées partielles de type elliptique*, Dunod, Paris, (1968).

- [MS] M.K.W. MURTHY - G. STAMPACCHIA, "Boundary value problems for some degenerate elliptic operators", *Ann. Mat. Pura Appl*, **80**, p.1-122, (1968).
- [St] G. STAMPACCHIA, "Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **15**, p.189-258, (1965).
- [Tr] N.S. TRUDINGER, "Linear elliptic operators with measurable coefficients", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **27**, p.265-308, (1973).

A.A.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"

Università degli Studi di Napoli

Complesso Monte S. Angelo - Via Cintia - 80126 Napoli

T.R.

Dipartimento di Matematica

Università della Basilicata

Via Nazario Sauro, 85 - 85100 Potenza

**POISSON OPERATOR FOR A DEGENERATE
 PARABOLIC PROBLEM**

Nota di Nunzia A. D'Auria
 Presentata dal Socio Guido Trombetti
 Adunanza del 13.01.96

Riassunto. In questo lavoro risolviamo con tecniche pseudo-differenziali un problema al contorno per un operatore parabolico degenere.

Abstract. In this paper we solve a boundary problem for an degenerate parabolic operator, by pseudo differential techniques.

Several authors (see Boutet de Monvel [2], Igari [7], Matsuzava [8], Tsutsumi[11]) have investigated construction methods, based on pseudo-differential techniques, of a fundamental solution for problems of type

$$(P_0) \quad \begin{cases} \partial_t u + p(t, x, D_x)u = 0 & t \in]0, T], y > 0, x \in R \\ u(0, x) = u_0 \end{cases}$$

where $p(t, x, D_x)$, $D_x = i^{-1} \partial_x$, belongs to a class of pseudo-differential operators where the degenerate elliptic operator $\partial_{x_1}^2 + x_1^2 \partial_{x_2}^2$, $x = (x_1, x_2)$, sets.

Recently, in [5], N.A.D'Auria and O.Fiodo, have considered the following problem:

$$(P_1) \quad \begin{cases} \partial_t U = (\partial_y^2 + y^2 \partial_x^2)U & t \in]0, T], y > 0, x \in R \\ U(t, 0, x) = 0 & t > 0, \quad U(0, y, x) = U_0 \quad y > 0 \end{cases}$$

and they have constructed a pseudo-differential operator (Poisson operator):

$$(I.1) \quad \begin{aligned} U_0 &\in C_0^\infty(R_y^+, \mathcal{F}'(R_x)) \rightarrow KU_0(t, y, x) \\ &= \int_{k_\xi} e^{ix\xi} \langle k(t, y, \sigma, \xi), \hat{U}_0(\sigma, \xi) \rangle d\xi \in C^{(0)}([0, T] \times R_y^+, \mathcal{D}'(R_x)) \end{aligned}$$

in way that KU_0 is a solution of (P_1) , where

$$(I.2) \quad \begin{aligned} \hat{U}_0(y, \xi) &= \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}(U_0(y, x)) \quad d\xi = (2\pi)^{-1} d\xi \\ k(t, y, \sigma, \xi) &= |\xi|^{\frac{1}{2}} \Phi(t|\xi|, y|\xi|^{\frac{1}{2}}, \sigma|\xi|^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{Poisson kernel}) \end{aligned}$$

$$(I.3) \quad \Phi(\tau, z, s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(4k+3)\tau} \varphi_{2k+1}(z) \varphi_{2k+1}(s),$$

where \mathcal{F} denotes the Fourier transform and $\varphi_n(z)$, $n \in N$, are Hermite functions (see [6], [10]).

In this paper we investigate problem (P_1) when $U_0 \in \mathcal{F}'(R_y^+ \times R_x)$.

We prove that the operator K is linear and continuous

$$C_0^\infty(R_y^+ \times R_x) \rightarrow C^{(0)}\left([0, T], C^\infty\left(\bar{R}_y^+ \times R_x\right)\right)$$

and that it can be extended as a linear and continuous operator

$$\mathcal{F}'(R_y^+ \times R_x) \rightarrow C^{(0)}\left([0, T], \mathcal{D}'(R_y^+ \times R_x)\right)$$

in way that KU_0 is a solution of (P_1) , when $U_0 \in \mathcal{F}'(R_y^+ \times R_x)$ (see theorem 3.2).

§1. \mathcal{H}_r spaces

We denote by $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_r(R_z)$, $r \in N_0$, the completion of $\mathcal{S}(R_z)$ with respect to the norm

$$\|g\|_{(r)} = \sum_{i, j \leq r} \|z^i g^{(j)}\|_{L^2(R)}, \quad i, j \in N_0,$$

and by A the operator $u \rightarrow \partial_z^2 - z^2 u$, $u \in \mathcal{S}(R_z)$. A is the infinitesimal generator of holomorphic semigroup T in $L^2(R_z)$ and we have (see [5]):

$$Tg = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{(2k+1)\tau} \varphi_k(z) \int_R \varphi_k(s) g(s) ds$$

Now we prove the following:

Theorem 1.1- For any $g \in L^2(R_z)$, the function Tg is the only solution of the problem

$$(1.1) \quad \begin{cases} \partial_\tau u(\tau, z) = Au(\tau, z) \\ u(0, z) = g(z) \end{cases}$$

and we have $Tg \in C^\infty(R_\tau^+ \times R_z) \cap C^{(0)}(\bar{R}_\tau^+, L^2(R_z))$; moreover the operator $g \rightarrow Tg$ is linear and continuous:

$$\begin{aligned} L^2(R_z) &\rightarrow C^{(0)}(\bar{R}_\tau^+, L^2(\bar{R}_z)) \\ L^2(R_z) &\rightarrow L^2(R_\tau^+, \mathcal{A}_1). \end{aligned}$$

Proof. Let $u(\tau, z)$ be a solution of problem (1.1). Evidently it results:

$$-\frac{1}{2} \int_R \partial_\tau |u|^2 dz = \|u(\tau, \cdot)\|_{(0)}^2 \quad \tau > 0;$$

by integration we have:

$$(1.2) \quad \frac{1}{2} \int_R |u(a, z)|^2 dz = \int_a^{+\infty} \|u(\tau, \cdot)\|_{(0)}^2 d\tau \quad a > 0,$$

and then we obtain:

$$\frac{1}{2} \|g\|^2 = \int_{R^+} \|u(\tau, \cdot)\|_{(0)}^2 d\tau.$$

This fact proves that $u \in L^2(R_\tau^+, \mathcal{A}_1)$ and moreover it proves that u is the only solution of problem (1.1). Since the semigroups theory (see [9], [1]) guarantees us that the function Tg solves the problem (1.1), from (1.2) it follows the assert.

Now let \mathcal{B} be the ring generated by identity operator and by operators:

$$B = z - \partial_z \quad \bar{B} = z + \partial_z$$

and let $\mathcal{B}_r, r \in N_0$, be the set of monomials of \mathcal{B} with degree less or equal to r .

Clearly any element of \mathcal{B} is a linear combination of operator of the type $z^i \partial_z^j$, with $i+j = r$; consequently:

$$g \in \mathcal{A}_r \Leftrightarrow Dg \in L^2(R_z), \quad \forall D \in \mathcal{B}_r.$$

If $D \in \mathcal{B}_r$, we denote with v_1 and v_2 the number of factors of D equals to \bar{B} and to B respectively; assuming $v = v_1 - v_2$, we will call v "index associate" to the operator D .

The following proposition holds:

Proposition 1.2 - Let $D \in \mathcal{B}_r$, and let ν be the index associate to D . Then for any $g \in \mathcal{H}_r$, with $1 \leq r$, we have:

$$DTg = e^{-2\nu\tau}TDg.$$

Proof. Since (see.[6])

$$(1.3) \quad \overline{B}\varphi_0 = 0$$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} B\varphi_k &= \sqrt{2k+1}\varphi_{k+1} & \forall k \in N_0 \\ \sqrt{2k+1}\varphi_k &= \overline{B}\varphi_{k+1} & \forall k \in N_0; \end{aligned}$$

we have

$$\overline{BT}g = e^{-2\nu\tau}T(\overline{B}g) \quad BTg = e^{2\nu\tau}T(Bg),$$

and this fact proves the proposition.

From theorem 1.1 and proposition 1.2, it follows:

Theorem 1.3 - The operator $g \rightarrow Tg$ is linear and continuous:

$$(1.5) \quad \mathcal{H}_r \rightarrow C^{(0)}(R_\tau^+, \mathcal{H}_r)$$

$$(1.6) \quad \mathcal{H}_r \rightarrow L^2(R_\tau^+, \mathcal{H}_{r+1}).$$

Proof. (1.5) follows immediately from proposition 1.2 and from theorem 1.1. From the latter we have moreover that, if $D \in \mathcal{B}_r$ is an operator with index associate ν , then

$$(1.7) \quad DTg = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k+\nu \geq 0} e^{-(2(k+\nu)+1)\tau} \varphi_k(z) \int_R \overline{D}\varphi_k(s)g(s)ds,$$

where \overline{D} is the adjoint operator of D . In fact, if $D \in \mathcal{B}$ and if $\nu > 0$ is the index associate to D , from (1.3) and (1.4) it follows that $D\varphi_k = 0$, $\forall k < \nu$ then, if $\nu < 0$ being $-\nu$ the index associate to \overline{D} we obtain

$$\overline{D}\varphi_k = 0 \quad \forall k + \nu < 0.$$

From (1.7) and (1.4) we deduce that

$$BDTg = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k+\nu \geq 0} e^{-(2(k+\nu)+1)\tau} \sqrt{2k+1}\varphi_{k+1}(z) \int_R \varphi_k(s)Dg(s)ds$$

$$\overline{BDT}g = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k+\nu \geq 1} e^{-(2(k+\nu)+1)\tau} \sqrt{2k-1}\varphi_{k-1}(z) \int_R \varphi_k(s)Dg(s)ds$$

from which

$$\|DTg(\tau, \cdot)\|_{(1)}^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k \geq 0} e^{-(2(k+\nu)+1)\tau} O(k) \left| \int_R \varphi_k(s) Dg(s) ds \right|^2 \quad \forall \tau \geq 0,$$

and then

$$\int_0^{+\infty} \|Tg(\tau, \cdot)\|_{(r+1)}^2 d\tau \leq c \|g\|_{(r)}^2,$$

where c is an absolute constant. This clearly proves (1.6).

We observe now that, if $q \in N_0$, it results that $\partial_\tau^q Tg = A^q Tg$. Since $A^q \in \mathcal{B}_{2q}$, the previous theorem gives us:

Theorem 1.4 - If $q \in N_0$ and if $r \geq 2q$, then the operator $g \rightarrow \partial_\tau^q Tg$ is linear and continuous:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_r &\rightarrow C^{(0)}(\overline{R}_\tau^+, \mathcal{H}_{r-2q}) \\ \mathcal{H}_r &\rightarrow L^2(R_\tau^+, \mathcal{H}_{r-2q+1}). \end{aligned}$$

Finally we prove the following:

Theorem 1.5 - If $p \in N_0$, then the operator $g \rightarrow \tau^p Tg$ is linear and continuous:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_r &\rightarrow C^{(0)}(\overline{R}_\tau^+, \mathcal{H}_{r+2p}) \\ \mathcal{H}_r &\rightarrow L^2(R_\tau^+, \mathcal{H}_{r+2p+1}). \end{aligned}$$

Proof. Firstly we observe that the relation (1.3) involves that if $D \in \mathcal{B}_1$, then we have:

$$(1.8) \quad \|D\varphi_k\|_{(0)} = O(k^2).$$

We suppose now that: $D' \in \mathcal{B}_{2p}$, $D'' \in \mathcal{B}_1$ and $D \in \mathcal{B}_r$ with index associate ν ; (1.7) and (1.8) imply

$$\|D' DTg(\tau, \cdot)\|_{(0)}^2 = \sum_{k+\nu \geq 0} \tau^{2p} e^{-(2(k+\nu)+1)\tau} O(k^{2p}) \left| \int_R \varphi_k(s) Dg(s) ds \right|^2 \quad \forall \tau \geq 0,$$

hence

$$\|Tg(\tau, \cdot)\|_{(r+2p)} \leq c \|g\|_{(r)}^2 \quad \forall \tau \geq 0.$$

This proves the first part of theorem. Moreover, from (1.7) and (1.8), it follows:

$$\|D'D''DTg(\tau, \cdot)\|_{(0)}^2 = \sum_{k+\nu \geq 0} \tau^{2p} e^{-2(2(k+\nu)+1)\tau} O(k^{2p+1}) \left| \int_R \varphi_k(s) Dg(s) ds \right| \quad \forall \tau \geq 0,$$

and then, integrating over R_τ^+ , we have the complete proof of the theorem.

§2. \mathcal{C}_r spaces

Theorem 2.1 - Let $u(\tau, z)$ be the solution of problem (1.1) where $g \in \mathcal{S}(R)$. Then we have:

$$|u(\tau, z)| \leq c \max |g(z)| \quad \forall z \in R$$

where c is an absolute constant.

Proof. We observe that the theorems in §1 imply that $u(\tau, z) \in \mathcal{S}(\overline{R_\tau^+} \times R_z)$; therefore, $|u(\tau, z)|$ has an absolute maximum at a point $(\tau_0, z_0) \in \overline{R_\tau^+} \times R_z$: (τ_0, z_0) is a positive absolute maximum point or a negative relative minimum for $u(\tau, z)$. That being stated, if

$$(2.2) \quad h(z) = 1 + \frac{1}{4} \cos^2 z \quad u(\tau, z) = h(z)\omega(\tau, z);$$

ω solves the equation

$$(2.3) \quad \partial_\tau u = \partial_z^2 \omega + 2 \frac{h'}{h} \partial_z \omega - \frac{z^2 h - h''}{h} \omega,$$

and then since $\min(z^2 h - h'') > 0$, we can say that $\omega(\tau, z)$ has not positive relative maxima and negative relative minima on the half-plane $\tau > 0$. From this fact it follows that:

$$|\omega(\tau, z)| \leq \max |\omega(0, z)| \leq \max |g(z)| \quad \forall \tau \geq 0,$$

and this, using (2.2), proves the theorem.

We denote with $\mathcal{C}_r = \mathcal{C}_r(R_z)$, $r \in N_0$, the completion of $\mathcal{S}(R_z)$ with respect to the norm:

$$[g]_r = \sum_{i+j \leq r} |z^i g^{(j)}(z)| \quad i, j \in N_0.$$

The following theorem holds:

Theorem 2.2 - For any $r \in N_0$, if $g \in \mathcal{C}_r$, we have:

$$(2.4) \quad \sup_{\tau \geq 0} [Tg(\tau, \cdot)]_{(r)} \leq c [g]_{(r)}.$$

Proof. Evidently it is sufficient to prove the theorem for $g \in \mathcal{S}(R_y)$. Let $D \in \mathcal{B}_r$, take index associate v . Using proposition 1.2, we have

$$\sup_{\tau \geq 0} [DTg(\tau, \cdot)]_{(0)} \leq [Dg]_{(0)} \quad \text{if } v \geq 0$$

and

$$\sup_{\tau \in [0,1]^k} [DTg(\tau, \cdot)]_{(0)} \leq c [Dg]_{(0)} \quad \text{if } v < 0.$$

Let $D = D'D'$, with $D' \in \mathcal{B}_1$ from proposition 1.2 it follows that

$$DTg = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k+v \geq 0} e^{-(2(k+v)+1)\tau} \varphi_k(z) \int_K \overline{D'} \varphi_k(s) (1+|s|)^{-1} (1+|s|) D' g(s) ds$$

and then

$$(2.5) \quad |DTg(\tau, \cdot)| \leq c \sum_{k+v \geq 0} e^{-(2(k+v)+1)\tau} [g]_{(r)} \|D' \varphi_k\|_{(0)}$$

since the Hermite functions are equi-bounded.

At this point, being

$$\|D' \varphi_k\|_{(0)} = O(k^{\frac{1}{2}})$$

the rapidly convergence of the series in (2.5), for $\tau > 1$, proves (2.4).

§3. The Poisson operator

We introduce the Poisson operator K giving

$$(3.1) \quad K: F(y, x) \in C_0^\infty(R_y^+ \times R_x) \rightarrow KF(t, y, x) = \int_R e^{ix\xi} \langle k(t, y, \sigma, \xi), \hat{F}(\sigma, \xi) \rangle d\xi,$$

where $k(t, y, \sigma, \xi)$ (Poisson's kernel) is defined by (I.2) and (I.3). We have the following

Theorem 3.1 - The operator K is linear and continuous:

$$C_0^\infty(R_y^+ \times R_x) \rightarrow C^{(0)}([0, T], C^\infty(\overline{R_y} \times R_x)).$$

Proof. We consider $F(y, x) \in C_0^\infty(R_y^+ \times R_x)$ and we denote with $F_d(y, x) \in C_0^\infty(R_y \times R_x)$ the odd extension of F for $y < 0$. From (I.2) and (I.3) we obtain:

$$\langle k(t, y, \sigma, \xi), \tilde{F}(\sigma, \xi) \rangle \in C^{(0)}([0, T], \mathcal{S}(\overline{R_y})) \quad \forall \xi \in \dot{R}_\xi = R_\xi - \{0\},$$

where $\tilde{F} = \mathcal{O} F$ and moreover

$$(3.2) \quad \left| \partial_y^\beta \langle k(t, y, \sigma, \xi), \tilde{F}(\sigma, \xi) \rangle \right| \leq c \sup_{y < 0} \left[(1 + |\xi|^\beta) \hat{F}(y, \xi) + \left| \partial_y^\beta \hat{F}(y, \xi) \right| \right],$$

where c is a constant which depends on the support of F and not depends on t . Therefore from (3.1) we deduce that:

$$KF \in C^{(0)}([0, T], C^\infty(\bar{R}_y^+ \times R_x))$$

and, moreover, from (3.2) it follows that for any compact $V \subseteq [0, T] \times (\bar{R}_y^+ \times R_x)$:

$$\begin{aligned} \sup_V \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta KF(t, y, x) \right| &\leq c \sup_{y \geq 0} \int_R (1 + \xi^2)^{-1} (1 + |\xi|^{\alpha+2}) \left[\left| \hat{F}(y, \xi) \right| + \left| \xi^\beta \hat{F}(y, \xi) \right| + \left| \partial_y^\beta \hat{F}(y, \xi) \right| \right] d\xi \\ &\leq c \sup_{y \geq 0} \int_R (1 + \xi^2)^{-1} \left[(F(y, x))^\wedge + \left| (\partial_x^{\alpha+\beta+2} F(y, x))^\wedge \right| + \left| ((\partial_x^{\alpha+2} + 1) \partial_y^\beta F(y, x))^\wedge \right| \right] d\xi. \end{aligned}$$

Now we consider $\psi(y, x) \in C_0^\infty(R_y^+ \times R_x)$; we have:

$$\left| \hat{\psi}(y, \xi) \right| \leq \int_R |\psi(y, x)| dx \leq c \max |\psi(y, x)|$$

where the constant c depends on the support of $\psi(y, x)$ only. It follows that

$$(3.3) \quad \sup_V \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta KF(t, y, x) \right| \leq c \|F\|_{C^{\alpha+\beta+2}(R_y^+ \times R_x)}.$$

This completes the proof.

Theorem 3.2 - The operator K extends in a linear and continuous operator:

$$\mathcal{E}'(R_y^+ \times R_x) \rightarrow C^{(0)}([0, T], \mathcal{D}'(R_y^+ \times R_x))$$

Proof. We consider: $F(y, x) \in C_0^\infty(R_y^+ \times R_x)$; $F_0(y, x) \in C_0^\infty(R_y \times R_x)$ such that $F_0 = F$ for $y > 0$ and $F_0 = 0$ for $y < 0$; $\psi(y, x) \in C_0^\infty(R_y^+ \times R_x)$; $\chi(\sigma) \in C_0^\infty(R)$ such that $\chi = 1$ in a neighborhood of y -projection of the support of F .

By a straightforward calculation, we can prove that:

$$\begin{aligned} &\langle KF(t, y, x), \psi(y, x) \rangle \\ &= \int_{R^1} \tilde{F}_0(\eta, \xi) d\eta d\xi \int_{R^1} e^{i\sigma\eta} \chi(\sigma) \langle k(t, y, \sigma, \xi), \hat{\psi}(y, -\xi) \rangle(t, \sigma, \xi) d\sigma \\ &= \int_{R^2} (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-m} \tilde{F}_0(\eta, \xi) d\eta d\xi \int_{R^1} e^{i\sigma\eta} (1 + \xi^2 + D_\sigma^2)^m \chi(\sigma) \langle k, \hat{\psi} \rangle(t, \sigma, \xi) d\sigma, \end{aligned}$$

and hence, reasoning as for (3.2) and (3.3):

and hence, reasoning as for (3.2) and (3.3):

$$|\langle KF(t, y, x), \psi(y, x) \rangle| \leq c \|\psi(y, x)\|_{C^{2m}} \|F\|_{H^{-m}(R_y \times R_x)},$$

where c depends on the support of F only. This inequality proves the theorem (see [12]).

REFERENCES

- [1] Avantaggiati A. - *Sviluppi in serie di Hermite-Fourier e condizione di analiticità e quasi analiticità*, Methods of Functional Analysis and Theory of Elliptic Equations, Proc. of the Inter. Meeting, pp 282-331, 1982.
- [2] Boutet de Monvel L. - *Hypoelliptic Operators with double characteristics and the related Pseudodifferential Operators*, Comm. Pure Appl. Math. 27, pp 585-639, 1974.
- [3] Cimmino G. - *On Tempered Ultradistributions as boundary traces*, Methods of Functional Analysis and Theory of Elliptic Equations, Proc. the Inter. Meeting, pp 80-102, 1982.
- [4] D'Auria N., Fiodo O. - *Su un problema di evoluzione*, Rapp. int. della Fac. di Ing. di Napoli, Preprint n. 62, 1989.
- [5] D'Auria N., Fiodo O. - *Su un problema parabolico degenero*, Rend. Acc. delle Scienze Fis. e Mat., della Soc. Naz. di Scienze Lettere e Arti in Napoli, serie IV, vol. LIX, pp 19-32, 1992.
- [6] Gatteschi L. - *Funzioni Speciali*, Coll. di Mat. Appl., 5 Utet Torino, 1973.
- [7] Igari K. - *Degenerate Parabolic Differential Equations*, Proc. Japon Acad. 49, pp 229-232, 1973.
- [8] Matsuzava T. - *On degenerate parabolic Equations II*, Nagoya Math. vol. 52, pp 61-84, 1973.
- [9] Pazy A. - *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag New York, 1983.
- [10] Tricomi F.G. - *Funzioni ipergeometriche confluenti*, Cremonese, 1954.
- [11] Tsutsumi C. - *The fundamental solution for a parabolic Pseudodifferential Operators and Parametrices for Degenerate Operators*, Proc. Japon Acad. 51, pp 103-108, 1975.
- [12] Yosida K. - *Functional Analysis*, Fourth Edition, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg New York, 1974.

Nunzia A. D'Auria - Dip. di Mat. e Appl. "R. Caccioppoli", Università di Napoli "Federico II", via Claudio, 21 - cap. 80125

Groups with many complemented subgroups

NOTA DI MARIA CRISTINA CIRINO GROCCIA E CARMELA MUSELLA

PRESENTATA DAL SOCIO MARIO CURZIO

ADUNANZA DEL 30.3.1996

Riassunto. - Si studiano i gruppi che verificano la condizione minimale sui sottogruppi normali che non siano dotati di complemento nel reticolo di tutti i sottogruppi. In particolare, si determinano condizioni affinché tali gruppi abbiano il reticolo dei sottogruppi complementato.

Abstract. - Groups are considered which satisfy the minimal condition on normal subgroups without complements in the lattice of all subgroups. In particular, some conditions are given, under which the lattice of subgroups of such groups are complemented.

1 Introduction

Let G be a group, and let H be a subgroup of G . We shall say that H is *complemented* in G if it is a complemented element of the lattice $\mathfrak{L}(G)$ of all subgroups of G , i.e. if there exists a subgroup K of G such that $G = \langle H, K \rangle$ and $H \cap K = 1$. Such a subgroup K will be called a *complement* of H in G . A group G is said to be a *K-group* if $\mathfrak{L}(G)$ is a complemented lattice, i.e. if every subgroup of G is complemented in G . The structure of soluble K -groups has been the object of many investigations. For results about this subject and other related questions we refer to Chapter 3 of [5]. In particular, F.Napolitani [3] has proved that a soluble group whose normal subgroups are complemented is a K -group. The aim of this article is to consider (generalized) soluble groups having only few non-complemented normal subgroups. In fact, we shall prove the following result.

Theorem. *Let G be a group such that the set of non-complemented normal subgroups either is empty or satisfies the minimal condition. If $\Phi(G/G^{(i)}) = 1$ for all $i \geq 1$ and there exists a non-negative integer n such that $G^{(n)}$ is hypercentral, then G is a soluble K -group.*

The above theorem generalizes a previous result of M.Emaldi [2] concerning soluble groups whose infinite normal subgroups are complemented. Note also that N.S. Černikov considered in [1] groups G satisfying the minimal condition on the set of subgroups H for which does not exist $K \in \mathcal{L}(G)$ such that $G = HK$ and $H \cap K = 1$.

It is well-known that, if G is a radical group whose Hirsch-Plotkin radical has finite rank, then G contains a normal subgroup N of finite index whose commutator subgroup N' is hypercentral (see [4], Part 2, Theorem 8.16). Thus the above theorem has the following consequence.

Corollary A. *Let G be a radical group such that the set of non-complemented normal subgroups either is empty or satisfies the minimal condition. If $\Phi(G/G^{(i)}) = 1$ for all $i \geq 1$ and there exists a positive integer n such that the Hirsch-Plotkin radical of $G^{(n)}$ has finite rank, then G is a soluble K -group.*

Obviously, if G is a group with finitely many conjugacy classes of non-complemented subgroups, then G has only a finite number of non-complemented normal subgroups. Therefore we have also the following result.

Corollary B. *Let G be a group with finitely many non-complemented normal subgroups. If $\Phi(G/G^{(i)}) = 1$ for all $i \geq 1$ and there exists a positive integer n such that $G^{(n)}$ is hypercentral, then G is a soluble K -group.*

Note finally that, if G is a soluble group with a unique conjugacy class of non-complemented subgroups, then it contains non-complemented normal subgroups, by the above quoted theorem of Napolitani, so that G has a unique non-complemented subgroup. In the last part of this article, an example will be given of groups of such type.

Most of our notation is standard; in particular we refer to [4] and [5].

2 Proof of the Theorem

Lemma 1 *Let G be group satisfying the minimal condition on non-complemented normal subgroups. If A is a non-trivial abelian normal subgroup of G , then A contains a minimal normal subgroup of G .*

PROOF – If every G -invariant subgroup of A has a complement in G , then A is a direct product of minimal normal subgroups of G (see [5],

Lemma 3.1.7). Suppose now that A contains normal non-complemented subgroups of G , and let H be a subgroup of A which is minimal with respect to the condition of being G -invariant and non-complemented. Consider a non-trivial a element of H , and let M be a G -invariant subgroup of H which is maximal with respect to the condition $a \notin M$. Since M is a proper G -invariant subgroup of H , it has a complement C in G . Then $C_0 = H \cap C$ is a G -invariant complement of M in H . If C_1 is a proper non-trivial G -invariant subgroup of C_0 , there exists a normal subgroup C_2 of G such that $C_0 = C_1 \times C_2$. By the maximal choice of M , we obtain that $a \in MC_i$ for $i = 1, 2$, a contradiction since

$$MC_1 \cap MC_2 = M.$$

Therefore C_0 is a minimal normal subgroup of G contained in A . \square

Our next result is an obvious consequence of Lemma 1.

Corollary 2 *Let G be a group satisfying the minimal condition on non-complemented normal subgroups. Then G does not contain infinite cyclic normal subgroups.*

We can now prove that soluble groups with the minimal condition on non-complemented normal subgroups are periodic.

Proposition 3 *Let G be a soluble group satisfying the minimal condition on non-complemented normal subgroups. Then G is periodic.*

PROOF — If G is abelian, the result follows immediately from Corollary 2. Assume that G has derived length $n \geq 2$ and let A be the smallest non-trivial term of the derived series of G . By induction on n , it can be assumed that the factor group G/A is periodic. If G is not periodic, then also A is not periodic, and without loss of generality we may also suppose that A is torsion-free. By Lemma 1, A contains a minimal normal subgroup N of G , and clearly $G/C_G(N)$ is isomorphic with an irreducible locally finite group of automorphisms of N . It follows that N is periodic (see [4] Part 1, Lemma 5.26), and this contradiction completes the proof. \square

Lemma 4 *Let G be a group and N a normal subgroup of G . If H is a complement of N in G , K is a normal subgroup of G contained in H and L is a complement of K in G , then $H \cap L$ is a complement of NK in G .*

PROOF – Clearly

$$H = KL \cap H = K(L \cap H)$$

and **so**

$$\langle NK, H \cap L \rangle = \langle N, H \rangle = G.$$

Moreover

$$NK \cap (H \cap L) = (N \cap H)K \cap L = K \cap L = 1,$$

and **hence** $H \cap L$ is a complement of NK in G . □

Lemma 5 *Let G be a group satisfying the minimal condition on non-complemented normal subgroups such that $\Phi(G) = 1$. If N_1, \dots, N_t are complemented abelian minimal normal subgroups of G , then also $\langle N_1, \dots, N_t \rangle$ has a complement in G .*

PROOF – This lemma is obvious if $t = 1$. Suppose that $t \geq 2$ and **assume** by induction that $N = \langle N_1, \dots, N_{t-1} \rangle$ has a complement H in G . **Without** loss of generality it can be assumed that N is a proper subgroup of $\langle N_1, \dots, N_t \rangle$, so that $H \cap \langle N_1, \dots, N_t \rangle$ is a non-trivial abelian normal subgroup of G . Then $H \cap \langle N_1, \dots, N_t \rangle$ contains a minimal normal subgroup M of G , by Lemma 1. Since $\Phi(G) = 1$, the subgroup M has a complement in G and Lemma 4 yields that also MN is complemented in G . On the other hand, N is properly contained in NM and $\langle N_1, \dots, N_t \rangle / N$ is a chief factor of G , so that $\langle N_1, \dots, N_t \rangle = NM$ has a complement in G . □

Lemma 6 *Let G be a group satisfying the minimal condition on non-complemented normal subgroups such that $\Phi(G) = 1$, and let A be an abelian non-trivial normal subgroup of G . Then A is a direct product of minimal normal subgroups of G and has a complement in G .*

PROOF – Assume that the subgroup T generated by all minimal normal subgroups of G contained in A is not complemented in G , so that by Lemma 5 we have $T = \text{Dr}_{i \in I} N_i$, where every N_i is a minimal normal subgroup of G and the set I infinite. Since G satisfies the minimal condition on non-complemented normal subgroups, there exists a proper subset J of I such that $I \setminus J$ is finite and $N = \text{Dr}_{j \in J} N_j$ has a complement in G . Clearly T/N satisfies the maximal condition on G -invariant subgroups and **hence** there exists in T a complemented G -invariant subgroup M containing N , which is a direct product of minimal normal subgroups of G

and is maximal with respect to these conditions. Let H be a complement of M in G . Then $A \cap H$ is an abelian non-trivial normal subgroup of G , and hence it contains a minimal normal subgroup K of G by Lemma 1. Since $\Phi(G) = 1$, the subgroup K has a complement in G , and it follows from Lemma 4 that also $\langle M, K \rangle = M \times K$ has a complement in G . This contradiction shows that T has a complement C in G . Clearly $A \cap C$ does not contain minimal normal subgroups of G , so that $A \cap C = 1$ by Lemma 1, and hence $A = T$ has a complement in G . \square

PROOF OF THE THEOREM. Assume that G is not soluble. Since the normal subgroup $N = G^{(n)}$ is hypercentral, it is hypoabelian, so that also the group G is hypoabelian. Then the factor group $G/G^{(\omega)}$ is a counterexample, and without loss of generality it can be assumed that $G^{(\omega)} = 1$. As $\Phi(G/G^{(i)}) = 1$ for each positive integer i , we have also $\Phi(G) = 1$. It follows from Lemma 6 that there exists a subgroup K of G such that $G = Z(N)K$ and $Z(N) \cap K = 1$. Thus

$$N = Z(N) \times (K \cap N)$$

and $K \cap N = 1$ since N is hypercentral. Therefore $N = Z(N)$ is abelian, and this contradiction shows that G is soluble. If G is abelian, then it is a K -group by Lemma 6. Suppose that G is not abelian, and let A be the smallest non-trivial term of the derived series of G . By induction on the derived length of G , it can be assumed that the factor group G/A is a K -group. On the other hand, A is a direct product of minimal normal subgroups of G and it has a complement in G by Lemma 6. Therefore G is a K -group (see [5], Lemma 3.1.9). \square

Remark 7 *There exists a periodic metabelian group with a unique non-complemented subgroup.*

PROOF — Let A be an infinite abelian group of exponent 5 and let x be the automorphism of A defined by $a^x = a^2$ for all $a \in A$. Then x has order 4, and the semidirect product $G = \langle x \rangle \ltimes A$ is a periodic metabelian group with $G' = A$. Let H be a subgroup of G such that A is not contained in H . Suppose first that $HA = G$, and let B be a subgroup of A such that $A = (H \cap A) \times B$. Then $G = HB$ and $H \cap B = 1$, so that H is complemented in G . Assume now that $H/H \cap A$ has order at most 2. Since $A = C_G(A)$, the core of $\langle x(A \cap H) \rangle$ is trivial, and so there exists a conjugate $\langle y(H \cap A) \rangle$ of $\langle x(H \cap A) \rangle$ such that $\langle y \rangle \cap A = 1$ and

$$(H/H \cap A) \cap \langle y(H \cap A) \rangle = 1.$$

Consider the subgroup $K = \langle y, H \rangle$ and let C be a complement of $A \cap K$ in A . If $L = \langle y, C \rangle$, then $G = KC = \langle H, L \rangle$. Let $h = y^n c$ be an element of $H \cap L$ with $c \in C$; thus

$$c = y^{-n} h \in (A \cap K) \cap C = 1$$

and $h = y^n \in H \cap \langle y \rangle = 1$. Hence $H \cap L = 1$ and L is a complement of H in G . It follows that the subgroup $\langle x^2, A \rangle$ is the unique non-complemented subgroup of G . \square

The above example also shows that in the hypothesis of the Theorem, the condition on the Frattini subgroup of the groups $G/G^{(i)}$, cannot be omitted.

REFERENCES

- [1] N.S. ČERNIKOV: Groups with minimal condition for uncomplemented abelian subgroups, *Soviet Math. Dokl.* **16** (1975), 996–998.
- [2] M. EMALDI: Sugli IK -gruppi risolubili, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **46** (1971), 9–13.
- [3] F. NAPOLITANI: Sui gruppi risolubili complementati, *Rend. Sem. Mat. Padova* **38** (1967), 118–120.
- [4] D.J.S. ROBINSON: *Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups*, Springer, Berlin, 1972.
- [5] R. SCHMIDT: *Subgroup Lattices of Groups*, de Gruyter, Berlin, 1994.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Università di Napoli “Federico II”
Complesso Universitario Monte S. Angelo
Via Cintia
I-80126 Napoli (Italy)

Le Collezioni di Strumenti e Modelli matematici
del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli"
dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II"

Nota di Luciano Carbone, Giuseppe Cardone, Franco Palladino
Presentata dal Socio Paolo de Lucia

Adunanza del 30 marzo 1996

Riassunto. Nella presente nota descriviamo le collezioni di strumenti e modelli matematici posseduti dal Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II", illustrando brevemente la loro storia, il loro recupero e alcune iniziative tese alla loro valorizzazione. Segnaliamo infine le problematiche più rilevanti ad esse relative.

Abstract. In this work, we describe the collections of mathematical models and instruments owned by the Department of Mathematic and Applications "R.Caccioppoli" of the University of Naples "Federico II". We shortly elucidate their history and recovery. We point out some relevant problems about them.

1. LA STORIA DELLE COLLEZIONI

1.1 Il clima culturale e i centri di produzione

Le parole del fisico inglese William Thomson, meglio conosciuto come Lord Kelvin¹:

"Io non sono soddisfatto finché non ho potuto costruire un modello meccanico dell'oggetto che studio. Se posso costruire un tale modello meccanico, comprendo; sino a che non posso costruirlo non comprendo affatto",

rendono efficacemente l'atmosfera culturale, positivista e meccanicista, prevalente nella seconda metà del '800.

Così proprio in questo periodo si diffuse presso le Università europee la costruzione o l'acquisto di collezioni di strumenti e modelli matematici con lo scopo di rendere concrete le proprietà caratterizzanti una data teoria, fornire evidenza concreta a un dato risultato e consentire l'esecuzione di calcoli complessi, anche per via grafica.

Si trattava sia di modelli per la Geometria descrittiva e proiettiva, per la Geometria algebrica, per la Teoria delle funzioni, per lo studio di superfici minime, per rappresentare singolarità in curve e superfici, per la Fisica matematica, etc. (erano per lo più modelli in gesso, o in legno e filo, o in celluloidi), sia di strumenti di misura come planimetri, integrafici, curvimetri, pantografi, pascaline, etc. (costruiti prevalentemente in acciaio e ottone).

¹ W.Thomson (Lord Kelvin) (1824-1907) fisico inglese, insegnò Filosofia naturale all'Università di Glasgow. Importanti furono i suoi studi in termodinamica e il suo trattato (scritto assieme a P.G.Tait) *Treatise on Natural Philosophy* (2 voll., Oxford, Clarendon Press, 1867) che fece testo in molte Università europee.

All'inizio la produzione di questi tipi di strumenti e modelli era realizzata artigianalmente da officine, laboratori o gabinetti annessi agli istituti universitari. In un secondo momento raggiunse livelli di produzione e di diffusione assai bene organizzati sia ad opera delle stesse università, sia per il nascere di istituti e laboratori extra universitari. Importante fu anche l'iniziativa presa da vari editori di allestire appositi cataloghi e di gestire la diffusione di modelli e strumenti.

Uno dei centri di sviluppo più importanti fu la Germania (ma non trascurabile fu l'apporto dell'Inghilterra, della Francia e anche dell'Italia).

Per quanto riguarda i modelli in gesso, di notevole rilievo fu la produzione dell'Istituto di matematica del Politecnico di Monaco di Baviera (*Mathematisches Institut der technischen Hochschule, München*, in seguito *MITH*) e del Seminario di matematica dell'Università di Gottinga (*Mathematisches Seminar der Universität, Göttingen*). Tra i maggiori progettisti di queste scuole vi furono Felix Klein, Alexander Brill, e tra gli esecutori si distinsero molti studenti alcuni dei quali avviati ad un brillante futuro (tra di essi vale la pena di citare, per il ruolo svolto poi nel settore, Walther Dyck).

Nella diffusione e commercializzazione si distinse l'editore L. Brill di Darmstadt, che dal 1877 in poi aveva raccolto modelli e strumenti, inserendoli in un catalogo² pubblicato in varie edizioni.

² Cfr. *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht veröffentlicht durch die Verlagshandlung von L. Brill, Darmstadt*, del quale si ha solamente notizia di edizioni del 1882 e del 1885.

Questo stesso catalogo fu nel 1903 riedito in forma più ampia da M. Schilling³.

Altri centri di produzione si ebbero ad esempio in Svizzera ad opera principalmente di G. Coradi e in Inghilterra, ove già nel 1876 sotto gli auspici della Mathematical Society di Londra si era tenuta un'esposizione.

Anche in Italia vi fu produzione di modelli e strumenti. Si possono a tale proposito ricordare il modello per la geometria non euclidea dovuto a Beltrami⁴.

Un'importante catalogo⁵ fu pubblicato dal suddetto Walther Dyck nel 1892, su incarico dell'Associazione dei matematici tedeschi. Esso serviva ad elencare ed illustrare la mostra di modelli matematici, fisico-matematici e di strumenti che si sarebbe dovuta tenere a Norimberga nel 1892, mostra che fu rimandata all'anno successivo per

³ Cfr. *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht veröffentlicht durch die Verlagshandlung von Martin Schilling*, Halle am Saale, 1903. E' stato possibile consultare questa edizione e un'altra, del 1911, accresciuta da nuove serie di modelli e strumenti prodotti successivamente. A quest'ultima edizione si farà qui riferimento.

⁴ E. Beltrami (1835-1900) insegnò nelle Università di Bologna, Pisa, Pavia e Roma. Si interessò, tra l'altro, di geometria differenziale dal punto di vista riemanniano. A lui si deve una nota interpretazione concreta della geometria non euclidea sulla pseudosfera. Sul modello di Beltrami cfr. A.C. Capelo-M. Ferrari, *La "cuffia" di Beltrami: storia e descrizione*, Bollettino di storia delle scienze matematiche, II (1982), 2, pp. 233-247.

⁵ Cfr. *Katalog mathematischer und mathematisch-physicalischer Modelle, Apparate und Instrumente*, München, K. Hof-u. Universitätsbuchdruckerei von Dr. C. Wolf und Sohn, 1892. Tale catalogo ebbe anche un supplemento nel 1893.

i gravi problemi sanitari che si erano venuti a creare in Germania in quel periodo. Il Dyck, nell'introduzione al catalogo, ricorda che molti istituti di tutta Europa avevano aderito all'iniziativa, mettendo a disposizione modelli e strumenti da essi posseduti. Lo stesso Lord Kelvin prese parte ad un comitato appositamente formatosi in Gran Bretagna per curare la partecipazione britannica all'iniziativa.

1.2 La costituzione delle raccolte del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli"

La documentazione ufficiale riguardante l'acquisizione di strumenti e modelli da parte della allora Facoltà di Scienze Matematiche dell'Università di Napoli è purtroppo quasi totalmente andata perduta. Indizi possono trarsi dai modelli stessi e da alcuni scritti (articoli, lettere, volumi) dei docenti che in quel periodo furono attivi.

Occorre segnalare peraltro che soprattutto a partire dai primi anni di questo secolo, Napoli divenne anche un centro di produzione.

L'inizio della costituzione sistematica delle raccolte si può far risalire con ragionevole certezza intorno al 1884.

Infatti a quell'epoca risale una lettera⁶ di Ettore Caporali⁷, professore di Geometria superiore presso la Facoltà di Scienze Matematiche, nella quale si fa menzione di acquisti di modelli,

⁶ Essa è attualmente presso il Dipartimento di Matematica "R.Caccioppoli".

⁷ Ettore Caporali (1855-1886), laureatosi a Roma nel 1875, dove fu diretto allievo di Cremona, a soli 23 anni nel 1878 divenne professore straordinario di Geometria superiore all'Università di Napoli; fu promosso a ordinario nel 1884. Morì suicida a 31 anni credendo di notare segni di decadenza nel suo ingegno.

laddove in una relazione sulle esigenze dell'Università, antecedente di pochi mesi, veniva segnalata a proposito della Matematica come grave lacuna proprio l'assenza delle collezioni di modelli geometrici già presenti in varie sedi universitarie italiane.

Un momento importante fu sicuramente quello dell'acquisizione da parte della Facoltà di Scienze Matematiche di una sede idonea, acquisizione seguita al trasferimento del Rettorato nell'edificio attualmente da esso occupato in Corso Umberto I. Con tale acquisizione, infatti si poté procedere all'espansione dei Gabinetti annessi alle cattedre.

Modelli geometrici in legno, in filo e qualcuno anche in gesso furono acquistati da Alfonso Del Re⁸, docente di Geometria descrittiva, certamente a partire dal 1901. Egli ne fece costruire vari anche dai suoi allievi.

Ernesto Cesàro⁹, professore di Calcolo Infinitesimale, fu in relazione epistolare nel 1905 col Coradi e con lo Schilling per l'acquisto di vari strumenti, anche per conto di vari colleghi quali

⁸ A. Del Re (1859-1921) insegnò Geometria descrittiva all'Università di Napoli dal 1899 in poi. Egli pubblicò nel 1906 un opuscolo a stampa recante il titolo *Insegnamento di Geometria descrittiva. L'opuscolo contiene il Programma del Corso e programma di esame per l'anno scolastico 1906-1907*, nonché l'*Elenco dei Modelli geometrici eseguiti dagli allievi della Scuola di Geometria descrittiva dell'Università di Napoli dal 1901 al 1906*.

⁹ Ernesto Cesàro (1859-1906) insegnò Calcolo infinitesimale a Napoli dal 1891 al 1906, anno in cui morì tragicamente nel mare di Torre Annunziata tentando di salvare il figlio Manlio che stava annegando.

Pasquale Del Pezzo¹⁰ e Domenico Montesano¹¹, come attesta una documentazione recentemente ritrovata nel "Fondo Cesàro" posseduto dal Dipartimento "R.Caccioppoli".

I contributi maggiori, invece, alla produzione a Napoli di modelli e strumenti furono probabilmente dati da E.Pascal e R.Marcolongo.

1.3 L'opera di E.Pascal e R.Marcolongo

Ernesto Pascal, professore di Analisi superiore all'Università di Napoli dal 1907 al 1937, aveva studiato a Gottinga nell'anno accademico 1888-89 presso Felix Klein che, come detto, fu, tra l'altro, uno dei maggiori progettisti di modelli in gesso.

Pascal favorì un insegnamento che, partendo dai problemi, giungesse alla spiegazione di questi tramite l'uso di strumenti e modelli matematici. Più volte preside della Facoltà di Scienze, "esercitò tale carica con la Sua solita tenace operosità e con nuovissime concezioni sopra l'organizzazione dell'insegnamento della matematica. Creò un seminario matematico, e per ciascuna cattedra di matematica, un annesso laboratorio con dotazione propria, a disposizione del titolare di cattedra. [...] I laboratori si svilupparono

¹⁰ Pasquale Del Pezzo (1859-1936) laureatosi nel 1880 in Giurisprudenza e nel 1882 in Matematica a Napoli, conseguì in tale sede la cattedra di Geometria proiettiva. Fu più volte Rettore e Preside di Facoltà.

¹¹ Domenico Montesano (1863-1930) si laureò a Roma nel 1884 e nel 1888 divenne professore straordinario di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di Bologna. Nel 1893 passò alla stessa cattedra dell'Università di Napoli, dove nel 1895 divenne ordinario e nel 1905 passò alla Geometria superiore.

pur essi rapidamente rivelandosi sovente un efficace mezzo per la ricerca e l'insegnamento"¹². Così nacquero i Gabinetti di Geometria proiettiva, Geometria descrittiva, Meccanica razionale, Analisi superiore, Fisica matematica, Geometria superiore, Calcolo infinitesimale, Disegno di Architettura, e Disegno di Ornato, che si andarono ad aggiungere al solo già esistente, quello di Geodesia.

Si ebbero così degli spazi in cui i professori, dopo le lezioni, potevano approfondire con gli studenti le più svariate problematiche con l'ausilio anche di strumenti e modelli matematici.

Quello che Pascal pensava utile per l'insegnamento, credeva potesse tornare utile anche alla ricerca. Infatti fu uno dei maggiori progettisti di *integrali*, strumenti in acciaio ed ottone che permettevano l'integrazione grafica di curve ed equazioni differenziali, e raccolse nell'opera *I miei integrali per equazioni differenziali*¹³ i principali risultati dei suoi studi sull'argomento. Il tipo più semplice di integrafo era quello che, data la rappresentazione grafica di una curva, consentiva di ottenere la rappresentazione grafica della curva integrale; altri tipi consentivano l'integrazione grafica di numerose equazioni differenziali (equazione di Riccati, di Volterra, etc.). Egli ne concepì molti e li realizzò avvalendosi di un abile meccanico dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Pasquale Moreno.

¹² Cfr. Mauro Picone, *Ernesto Pascal*, Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, (4) XII (1942).

¹³ Cfr. Ernesto Pascal, *I miei integrali per equazioni differenziali*, Napoli, Libreria di B. Pellerano, 1914.

Molto importante fu l'Istituto di Meccanica razionale diretto, praticamente dalla sua nascita, da Roberto Marcolongo¹⁴, a cui egli dedicò, per circa ventisette anni, le cure più assidue.

Nella sua autobiografia¹⁵, composta nel 1935, Marcolongo descrive bene come tale istituto era strutturato:

"La biblioteca è ricca già di più di *ottocento* volumi quasi tutti rilegati, molti dei quali sono stati da me donati; riguardano principalmente la Meccanica, il Calcolo vettoriale e la Storia della scienza. Comprende altresì più di 200 opuscoli a stampa, di tesi e di dissertazioni inaugurali italiane e straniere; 15 periodici scientifici, alcuni da me acquistati e ceduti all'Istituto. Vi si conserva ancora, a completa disposizione dei professori, colleghi e studenti la mia collezione di memorie scientifiche, con relativo catalogo, e ricca di oltre 6500 opuscoli di matematici italiani e stranieri e pure una ricca iconografia matematica. Negli appositi scaffali addossati alle pareti della sala maggiore si conservano strumenti e modelli matematici che fanno dell'Istituto il più ricco e il più completo di quanti ne esistano in Italia e all'estero".

Egli dà poi una parziale descrizione degli strumenti e modelli matematici posseduti dall'Istituto e del loro uso nel corso delle lezioni:

"L'istituto possiede: *a*) la completa raccolta degli eleganti modelli cinematici dello Schilling; *b*) i modelli di H.Grassmann j. pel moto alla Poincot; *c*) una serie di modelli di giroscopi simmetrici, uno dei quali molto grandi; giroscopio di Gruy: pendolo giroscopico;

¹⁴ Roberto Marcolongo (1862-1943) laureatosi a Roma nel 1886, insegnò Meccanica razionale prima all'Università di Messina, dal 1895 al 1907, e poi all'Università di Napoli fino al 1935.

¹⁵ Cfr. R.Marcolongo, *Quaranta anni di insegnamento*, Napoli, SIEM, 1935.

bilancia giroscopica; grande apparecchio giroscopico di Prandtl; modello del giroscopio della Kowalewski; ecc. *d*) l'autovibratore armonico; *e*) il Wondergraph per la composizione dei moti rotatori; *f*) vari modelli di sistemi articolati; *i*) l'integrafo di Abdank Abakanowicz e per le equazioni differenziali ordinarie di Pascal; *k*) regoli calcolatori; *l*) compasso ellittico; *m*) compasso per spirali; *n*) modelli in gesso delle quadriche e loro geodetiche e in cartone mediante dischi di sezioni circolari; *q*) modelli di triangoli sferici tracciati su sfere di legno; *s*) numerosi modelli in cartone di poliedri, di cilindroidi; *t*) modelli in gesso della superficie d'onda."

"(...) Questo ampio e svariato materiale è largamente sfruttato, è il più grande sussidio alle lezioni di Meccanica razionale e superiore. Non vi ha lezione in cui, in un modo o nell'altro, esso non venga mostrato agli studenti; alcune lezioni anzi sono completamente dedicate ad illustrare con esperienze i risultati teorici."

L' "ampio e svariato materiale", cioè modelli e strumenti fisico-matematici, era in parte stato costruito dagli stessi studenti o laureandi proprio sotto la guida di Marcolongo:

"Da notare (...) una larga serie di disegni eseguiti, sotto la mia direzione, da studenti e da laureandi di matematica (...), costruzioni relative a problemi classici di matematica elementare (costruzione del problema di Apollonio, cerchio dei nove punti, teorema di Feuerbach, cerchio di Brocard, duplicazione del cubo, trisezione dell'angolo), modelli in cartone per varie dimostrazioni del teorema pitagorico, etc.. [...] Una ventina di modelli sono stati costruiti da studenti allievi ingegneri e da laureandi sotto la mia direzione e quella dell' assistente Prof. M. Pascal. (...). In grandi tavole sono raccolte tutte le particolarità della composizione dei moti armonici e le fotografie delle curve giroscopiche ottenute per la prima volta nell'Istituto ."

Marcolongo fu anche l'organizzatore nell'ottobre 1921, in occasione di un congresso della Mathesis, di una mostra di modelli e strumenti tenuta nei locali della Facoltà di Scienze della R. Università.

Vale la pena infine di ricordare che Marcolongo fu uno dei massimi studiosi di Leonardo da Vinci. Nel corso dei suoi studi vinciani egli fece riprodurre uno strumento basato su un sistema articolato descritto da Leonardo, per la soluzione del celebre problema di Alhazen o del biliardo circolare, consistente nel determinare la traiettoria di un raggio luminoso emesso da una sorgente puntiforme, che, dopo aver subito una riflessione su uno specchio sferico, giunge all'occhio dell'osservatore.

1.4 Gli eventi bellici e la dispersione delle collezioni

Alla vigilia del secondo conflitto mondiale i vari Gabinetti di Matematica possedevano dunque una notevole quantità di modelli e strumenti matematici. Essi, però, furono per la maggior parte persi o distrutti durante la seconda guerra mondiale a causa dell'occupazione dei locali da parte delle forze alleate.

A tale proposito si possono riportare le parole di C. Miranda¹⁶, chiamato alla cattedra di Istituzioni di matematica poco prima dell'occupazione militare alleata, e che fu tra i pochi ad essere presente a Napoli nei mesi immediatamente successivi alla fine della guerra, le quali ci danno l'idea dello stato dei locali e delle biblioteche dei vari gabinetti (e quindi anche di quegli "scaffali" di cui aveva parlato Marcolongo, nei quali erano conservati modelli e strumenti) in quel

¹⁶ Cfr. C.Miranda, *Breve storia e prospettive future dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli*, Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, (4) XLIV (1977).

periodo: "Quando, dopo l'occupazione alleata, si volle riprendere l'attività universitaria e cioè all'inizio dell'anno 1943/44, la situazione era disperata. I locali erano stati occupati dalla U.S.A. Military Police e dei professori una metà erano stati bloccati oltre la linea del fronte. I presenti a Napoli erano Caccioppoli, Nobile e Miranda. Andreoli, pur presente a Napoli, era stato sospeso dall'insegnamento per motivi politici. [...] Quanto ai locali, allo sgombero delle truppe alleate, poco dopo la liberazione di Roma, ci si trovò di fronte a una situazione disastrosa perché i mobili dei Gabinetti e della sala Battaglini erano semi distrutti insieme con alcune aule e i libri delle varie biblioteche erano ammassati per terra in uno stanzone, allora privo di pavimento, che trent'anni prima era stato l'aula dell'Istituto di Fisica Sperimentale. Distrutti anche gli inventari e gli schedari e quanto avrebbe potuto servire a mettere ordine nel materiale rimasto".

Visto lo sfascio totale, la Facoltà di Scienze, in una seduta del 28-9-44, prese "una decisione coraggiosa": abolì i vecchi Istituti con i relativi Gabinetti e diede vita ad un unico Istituto di Matematica, con una Biblioteca unica, dove confluì tutto il materiale rimasto. Fu allora effettuata anche una ricognizione inventariale nella quale furono elencati i modelli e strumenti ancora utilizzabili.

Il lavoro di riordino del materiale dell'Istituto fu effettuato, riprendendo ancora le parole di Miranda, "in un clima di serena solidarietà", con la "validissima collaborazione di don Savino Coronato, di Federico Cafiero e di un gruppo di giovanissimi laureatisti fra il 1944 e il 1945, che fecero poi tutti una brillante carriera: Guido Stampacchia, Donato Greco, Carlo Ciliberto e Francesco Stoppelli".

Ma il momento d'oro delle collezioni di modelli e strumenti matematici era ormai passato.

Il clima culturale era profondamente mutato: nella matematica cominciarono a prevalere le istanze formaliste di stampo bourbakista e hilbertiano; gli strumenti di calcolo subirono l'impari concorrenza dei primi calcolatori elettronici.

Non si procedette così alla costituzione di sale espositive per i pochi strumenti rimasti.

Le collezioni, seguendo un destino comune a molte esistenti in Italia, furono accantonate e talora, come in occasione del terremoto del 1980, subirono ulteriori dispersioni. Bisogna comunque ricordare anche gli enormi problemi di mancanza di spazi che hanno a lungo afflitto, e parzialmente affliggono ancora, l'intera Università di Napoli.

1.5 La ricostituzione delle collezioni

A partire dalla metà degli anni '80, in un clima di un ritrovato maggior interesse per la storia della matematica e delle sue applicazioni, sono iniziati in maniera sistematica i lavori di riordino delle collezioni: risistemazione, ripulitura, catalogazione, studio.

Per quanto riguarda la risistemazione e la ripulitura, preziosa è stata l'opera del signor Ignazio Lombardi, abile ebanista, attualmente impiegato presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni.

Le collezioni, così, da strumenti attivi della ricerca scientifica hanno acquisito un valore di testimonianza storica e culturale di notevole significato.

Esse inoltre sembrano poter costituire anche un valido elemento nella diffusione e nella divulgazione della cultura matematica. A tale proposito si possono segnalare tre esposizioni che si sono tenute negli ultimi anni, e che hanno rappresentato un'ottima occasione per

valorizzare gli antichi strumenti, modelli, libri e carteggi conservati presso il Dipartimento "R.Caccioppoli" dell'Università "Federico II".

Tra il 18 e il 22 marzo 1991, in occasione della *Prima settimana della cultura scientifica*, indetta dal Ministero dell'Università e della Ricerca scientifica e tecnologica, fu organizzata una giornata di conferenze e di esposizione del materiale scientifico, dal nome *Testimonianze matematiche a Napoli*, presso la sede dell'Istituto italiano per gli studi filosofici, a Palazzo Serra di Cassano, dove furono esposti numerosi modelli in gesso di superfici algebriche, un modello in legno e filo, due integrali.

Tra il 4 e il 10 maggio 1992 si svolse a Napoli la *Seconda settimana della Cultura scientifica e tecnologica*, in occasione della quale furono esposti modelli matematici in gesso.

Tra l' 11 novembre 1992 e il 6 gennaio 1993 fu realizzata la mostra dal titolo *Lo studio delle curve a Napoli tra la fine del sec. XIX e gli inizi del sec. XX* presso l'IDIS (Istituto per la valorizzazione e la diffusione della cultura scientifica), in cui si esposero modelli in gesso, integrali, strumenti, libri riguardanti i contributi di sei matematici napoletani (Battaglini, Cesàro, Del Pezzo, Marcolongo, Pascal e Siacci) allo studio delle curve nei suoi vari aspetti (geometrico, analitico, meccanico, grafico, storico) in un momento cruciale per l'elaborazione del concetto stesso di curva.

2. LE COLLEZIONI MUSEALI

2.1 La sede delle collezioni

Attualmente i modelli e strumenti matematici recuperati tramite gli interventi a cui si è prima accennato, sono conservati nella sede di via Mezzocannone, 8 del Dipartimento di Matematica e Applicazioni.

I locali dove essi sono ora disposti (il cosiddetto Istituto di Analisi superiore, un tempo Gabinetto di Geodesia, poi Gabinetto di Geometria proiettiva) sono collocati al terzo piano del complesso monumentale, un tempo appartenuto ai Gesuiti.

Sono di per sé di notevole interesse in quanto rappresentano un modello assai ben conservato di un istituto scientifico matematico tra la fine del secolo XIX e l'inizio del secolo XX.

Constano essenzialmente di uno studio, di una piccola biblioteca, di una sala d'esposizione, di una sala per lezioni. Quest'ultima (il cosiddetto "Coretto") è arredata con scanni dell'antico refettorio gesuitico.

Sullo stesso piano e a poca distanza trova posto la cosiddetta Sala Battaglini, sede del Seminario di Matematica inaugurato all'inizio del secolo XX. In essa si tenevano conferenze pubbliche e veniva custodita un'imponente raccolta di estratti. E' assai ben conservata e accoglie a tutt'oggi i busti di tre insigni matematici napoletani (Battaglini, Capelli, Trudi).

Gli strumenti sono attualmente riposti in alcune bacheche di vetro.

2.2 Descrizione delle collezioni

Le collezioni si possono ripartire naturalmente in modelli e strumenti e distinguere per omogeneità di materiali adoperati nella costruzione, secondo un uso consueto nei cataloghi d'epoca.

All'interno di tale prima ripartizione, si può effettuare un'ulteriore suddivisione per ideatori (o case editrici).

Nella descrizione che segue verranno anche man mano segnalate la finalità d'uso culturale e scientifico di vari gruppi di modelli e strumenti.

Lo stato di conservazione delle collezioni è generalmente non sempre buono.

(A) MODELLI

(1) Modelli in gesso

I. Le collezioni in gesso di M.Schilling (circa 40 modelli)

II. Le collezioni in gesso di L.Brill (circa 30 modelli)

III. Modello in gesso di G.Andreoli

I modelli in gesso risalgono alla fine del XIX sec. e agli inizi del sec. XX; sono di produzione tedesca, eccezion fatta per quello indicato al punto III che risulta costruito nel 1926 dal prof. G.Andreoli.

Tra di essi si possono individuare varie serie che vengono elencate di seguito

- *Modelli per lo studio delle proprietà delle Quadriche;*

- *Modelli per lo studio delle proprietà delle Superfici del III ordine rigate;*

- *Modelli per lo studio delle proprietà delle Superfici del III ordine non rigate*

- *Modelli per lo studio delle proprietà delle Superfici del IV ordine*

- *Modelli per lo studio delle proprietà delle Superfici a curvatura costante negativa*

Tali modelli rappresentano superfici a curvatura costante negativa, dette anche superfici pseudosferiche, di tipo iperbolico, parabolico ed ellittico.

E. Beltrami nel suo *Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea* (1869) riconobbe che la geometria relativa a tali tipi di superfici si può assumere come un'interpretazione concreta della geometria non euclidea rispettivamente di tipo iperbolico, parabolico ed ellittico. Hilbert fece osservare in seguito che ciò era possibile solo localmente.

- *Modelli per lo studio delle proprietà delle funzioni di variabile reale e complessa;*

- *Modelli per lo studio delle proprietà delle Superfici di Riemann;*

- *Modelli per lo studio matematico di fenomeni fisici;*

- *Modelli per lo studio delle proprietà delle Superfici minime*

(2) Modelli in legno e filo di ferro (2 modelli)

Sono due modelli in legno e fil di ferro utili ad evidenziare, mediante proiezione su piani ortogonali, gli elementi analitici caratteristici di curve dello spazio. Fanno parte della serie XI del *Catalog* di Schilling.

(3) Modelli in metallo e vetro (3 modelli)

Sono, come li definì il suo progettista F.Schilling¹⁷, *modelli cinematici* per il tracciamento meccanico, con moto continuo, di curve quali epicicloidi, ipocicloidi, cicloidi, astroidi, evolventi di una data curva, etc. Fanno parte della serie XXIV del *Catalog* di Schilling.

(4) Modelli in legno

I. Modelli della G.Cussons - Lower Broughton, Manchester (6 modelli)

Definiti dalla stessa casa costruttrice *Models of penetration*, quelli posseduti attualmente facevano parte di una serie di modelli in "hard wood, polished", cioè in legno duro lucido, illustranti le curve formate sulle superfici di solidi che si compenetravano. La Cussons, nel pubblicizzare i modelli scriveva: "the curves of intersection are very clearly shown".

Essi mostrano l'intersezione di due solidi, come ad esempio di due cilindri, di un cono con un cilindro, di una sfera con un cilindro, di

¹⁷ Cfr. F.Schilling, *Über neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 44, 1899.

una sfera con un cono, di un toro con un cilindro, di coni e cilindri con prismi.

II. Modelli della *Lehrmittelanstalt J.Ehrhard & Co.in Bensheim, Hessen* (9 modelli)

Sono modelli che mostrano le proiezioni, mediante il metodo di luci ed ombre, di elementi meccanici (quali giunti e valvole) e architettonici (decorazioni).

III. Modelli del *Polytechnisches Arbeitsinstitut J. Schröder, Darmstadt.* (3 modelli)

Sono modelli rappresentanti solidi che si compenetrano e le loro proiezioni su piani ortogonali.

IV. Altri modelli (circa 15 modelli)

Rappresentano diversi tipi di solidi, come volte, coni e prismi obliqui, etc. L'unico della cui provenienza è possibile avere notizie, è un modello rappresentante una sezione piana del toro, recante l'etichetta "Sezione piana del toro - S.Tafuri 1909".

(5) Modelli in celluloidi (4 modelli)

Due di essi riportano un'iperbole cubica tracciata su un cilindro ellittico; gli altri due, un'iperbole cubica tracciata su di un cilindro iperbolico, e un'iperbole parabolica cubica tracciata su di un cilindro parabolico. Fanno parte della serie XXVIII del *Catalog* di Schilling.

(6) Modelli in cartone (1 modello)

Riproduce la compenetrazione di un prisma pentagonale con una piramide triangolare. Fa parte della serie XXVI del *Catalog* di Schilling.

(7) Modelli in legno e filo (1 modello)

Dei numerosi modelli di superfici realizzati in legno e filo, già posseduti dal Dipartimento di Matematica è stato possibile salvare solo quello qui classificato. Si tratta di un modello rappresentante una *Superficie rigata limitata da due sue coniche*, del tipo di quelli fatti costruire dal prof. A. Del Re dai suoi allievi tra il 1901 e il 1906.

(B) STRUMENTI

(1) Integrafì (1 modello)

Erano strumenti in acciaio e ottone che permettevano l'integrazione grafica di curve ed equazioni differenziali, mediante movimenti puramente meccanici, effettuando l'operazione di somma degli "elementi infinitamente piccoli" dell'espressione grafica della curva differenziale.

Attualmente se ne conserva un solo esemplare purtroppo incompleto. Fu costruito su progetto di E. Pascal dalla *Società di fabbricazione apparati e materiali elettrici (Napoli)*. Esso faceva parte

di una numerosa collezione fatta costruire dal Pascal, con la collaborazione di P. Moreno, "valente meccanico del R. Osservatorio astronomico di Capodimonte [Napoli]"¹⁸.

(2) Strumento per la verifica di un corollario del Teorema di Dandelin

Tale corollario afferma:

i fuochi dell'ellisse, ottenuta intersecando un cono con un piano, sono i punti di contatto delle due sfere tangenti al piano e tangenti internamente alla superficie conica.

È uno strumento in legno e metallo che fa parte della serie XXXII del *Catalog* di Schilling.

(3) Strumento per la verifica di una proprietà delle Ipocicloidi

La proprietà che tale strumento verifica è la seguente:

se una circonferenza rotola senza strisciare all'interno di un'altra circonferenza di raggio doppio, ogni punto su di essa descrive un segmento di retta. Quindi esso permette di tracciare un segmento di retta tramite il moto di una circonferenza che rotola all'interno di un'altra fissa.

È uno strumento in legno e metallo prodotto dalla *Société Genevoise pour la construction d'instrumentes de physique, Genève*.

(4) Ellissografo

¹⁸ Cfr. Ernesto Pascal, *I miei integrali per equazioni differenziali*, cit., p. 4.

Strumento in acciaio e ottone per il tracciamento di ellissi, appartiene alla serie XXXII del *Catalog* di Schilling.

(5) Ellissi che rotolano

Modello in legno riprodotto le seguenti proprietà dell'ellissi.

Se un'ellisse rotola, senza strisciare, su un'altra ellisse identica tenuta ferma, i fuochi della prima descrivono delle circonferenze. Inoltre, incrociando le congiungenti i fuochi della prima ellisse con i fuochi della seconda, esse si incontrano sempre nel punto di tangenza delle due ellissi.

Si tratta anche in questo caso di uno strumento appartenente al *Catalog* di Schilling, serie XXIV.

3. GLI ATTUALI PROBLEMI CONCERNENTI LE COLLEZIONI

Effettuata, come segnalato, la ripulitura dei modelli e degli strumenti, è divenuto prioritario il problema di un loro completo restauro.

Tale restauro presenta svariate difficoltà legate non tanto al numero di pezzi non amplissimo, quanto alla natura assai diversificata dei materiali utilizzati, all'elevata precisione con la quale i modelli e strumenti sono stati a suo tempo realizzati e alla non sempre completa disponibilità dei piani di progettazione¹⁹.

¹⁹ A titolo di esempio si può riportare l'esperienza seguente. Per la ricostituzione di una figura solida in legno, mancante di uno dei modelli del *Polytechnisches Arbeitsinstitut J. Schröder, Darmstadt*, costituita come si poteva evincere dalle sezioni e dalle piante conservatesi, da un tronco di cono retto a base ellittica sul

E' presumibile pertanto che il restauro possa risultare assai impegnativo, sia per l'ideazione, sia per l'esecuzione, sia per i costi. Sono state comunque già avviate alcune iniziative per affrontare tale problema.

Altro notevole problema è la compiuta valorizzazione di tali collezioni. Sembra abbastanza naturale che essa avvenga attraverso un'interazione con le altre strutture museali dell'Università di Napoli "Federico II" di natura affine: il Museo di Fisica, il Museo Mineralogico, il Museo zoologico, il Museo antropologico, il Museo paleontologico parzialmente già coordinati in una struttura comune e in buona parte insistenti nel complesso gesuitico in via Mezzocannone.

La stesura di una storia e di una descrizione compiuta delle collezioni è ormai in fase assai avanzata e per essa si può rinviare ad un volumetto in preparazione²⁰.

Alcune iniziative sono state inoltre già avviate per la formazione di un catalogo fotografico e di una presentazione virtuale delle collezioni, consultabile attraverso le reti di comunicazione telematica più diffuse.

L'attuale persistere negli stessi locali dello svolgimento di attività didattiche e scientifiche da parte di ricercatori del Dipartimento e l'assenza di personale specializzato costituiscono seri impedimenti all'esibizione permanente e sistematica delle collezioni e sembrano

quale si innestava con coincidenza di piani tangenti una calotta di un ellissoide non di rotazione, sono occorse varie ore di lavoro, eseguito da una fresatrice computerizzata ad alta precisione, e la compilazione di un apposito programma.

²⁰ Il titolo provvisorio è *Beni museali del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II"*, di L.Carbone, G.Cardone, F.Palladino.

doverla limitare per ora a situazioni episodiche quali mostre, manifestazioni e visite guidate opportunamente coordinate.

4. CENNI SULLE ALTRE COLLEZIONI

4.1 Le collezioni italiane

Grazie ad un censimento, in via di ultimazione²¹, la situazione delle collezioni italiane di modelli e strumenti si va via via chiarendo.

Le sedi universitarie più antiche hanno iniziato col possedere, agli inizi degli anni ottanta del XIX secolo, per lo più collezioni di L.Brill e in qualche caso pezzi della collezione Muret editi dal Delagrave di Parigi. La storia delle collezioni è stata per lo più analoga, nelle grandi linee, a quella della raccolta napoletana, pur presentando esiti fortemente differenziati.

Significativi gruppi di modelli e strumenti sono attualmente presenti a Genova, Torino, Pavia, Padova, Roma. Non è stato invece possibile a tutt'oggi rintracciare le collezioni pisane, eccezion fatta per qualche strumento.

Buono è lo stato di conservazione delle collezioni pavesi e padovane. A Padova è stato inoltre avviato qualche anno fa il recupero dei modelli in filo. In alcune altre università (Catania, Bari, Messina, Firenze, Milano) spesso di più recente costituzione, sono presenti riproduzioni di alcune serie dei modelli in gesso ottocenteschi, riproduzioni eseguite negli anni cinquanta di questo secolo, a cura di

²¹ Cfr. F.Palladino, *Modelli e strumenti matematici*, comunicazione tenuta al XV Congresso U.M.I., Padova 11-16 Settembre 1995, cfr. volume di "Conferenze e Comunicazioni", p. 328.

Luigi Campedelli per conto dell'Unione Matematica Italiana, essendo ormai cessata l'attività delle ditte originariamente produttrici. Qualche volta i modelli riprodotti da Campedelli andavano a sostituire in parte quelli distrutti dagli eventi bellici della seconda guerra mondiale, come nel caso di Messina.

4.2 Le collezioni nel mondo

Lo stato delle raccolte strumentali nel resto del mondo è a tutt'oggi poco noto. In effetti si possiedono per lo più notizie e studi assai frammentari.

Va però segnalata l'imponente raccolta, forse la più ampia esistente al mondo, conservata a Göttingen nel cosiddetto Hilbert-Raum. Si tratta di oltre 800 modelli e strumenti amorevolmente preservati, fino alla sua morte, da Otto Neugebauer, il noto storico della Matematica.

L'ironia della sorte ha voluto che le collezioni si conservassero nel miglior modo possibile e nella forma più completa proprio dove fu messo a punto quel nuovo modo di far matematica (il formalismo hilbertiano) che le rese obsolete.

5. BIBLIOGRAFIA

Oltre ai riferimenti bibliografici d'epoca già menzionati nelle varie note, vale la pena di segnalare che alle collezioni del Dipartimento di Matematica e Applicazioni di Napoli sono state dedicate di recente alcune pubblicazioni e tesi di laurea che qui di seguito riportiamo.

- G.Cardone, *Lo studio delle curve a Napoli tra la fine del secolo XIX e gli inizi del secolo XX*, Tesi di laurea, relatore prof. L.Carbone, Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli", Università di Napoli "Federico II", 1993.

- G.Cardone, *Alcuni problemi affrontati da matematici napoletani agli inizi del secolo XX*, Atti del convegno nazionale della Mathesis "Insegnamento matematico per problemi e per teorie", Isernia, 1994.

- G.Cardone, *Il Congresso della Mathesis del 1921: R. Marcolongo ed i modelli matematici*, Atti del Convegno nazionale della Mathesis "Mathesis centenario 1895-1995: Una presenza nella cultura e nell'insegnamento", Roma, 20-23 ottobre 1995 (in corso di pubblicazione).

- A.De Sio, *Modelli matematici in gesso: caratteristiche e cenni storici*, Tesi di laurea, rel. prof. F.Palladino, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata, Università di Salerno, 1995.

- P.De Vivo, *L'impiego dei modelli matematici nella realizzazione di Superfici di Riemann, Superfici minimali e Superfici sviluppabili*, Tesi di laurea, rel. prof. F.Palladino, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata, Università di Salerno, 1995.

- A.Morelli - F.Palladino, *Sui modelli matematici in gesso*, Lettera Pristem, Dossier didattica, n. 6, Novembre 1992, pp. XIII-XVI.

- F.Palladino, *Ernesto Pascal e gli integrali per equazioni differenziali*, Annali dell'Istituto e Museo di storia della scienza, X (1985), 2, pp. 67-76.

- F.Palladino, *Antichi strumenti e modelli matematici conservati a Napoli e a Pisa*, Physis, XXIX (1992), 3, pp. 833-847.

- F.Palladino, *Planimetri e Integrali*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 18b (1995), 1, pp. 51-79.

Notizie sulle esposizioni pubbliche delle collezioni napoletane si possono trovare in:

- L.Carbone - F.Palladino (a cura di), *Testimonianze matematiche a Napoli*, di prossima pubblicazione;

e nel già citato

G.Cardone, *Lo studio delle curve a Napoli tra la fine del secolo XIX e gli inizi del secolo XX*, Tesi di laurea.

Per quanto concerne il problema generale dei modelli e degli strumenti in matematica ci limitiamo a segnalare:

G.Fischer, *Mathematical models / Mathematische Modelle*, Braunschweig / Wiesbaden, Friedr. Vieweg & Sohn, 1986, 2 voll.

e a rinviare alla bibliografia ivi contenuta.

Per quanto riguarda infine l'utilizzazione di modelli e strumenti nella didattica della matematica ci limitiamo a ricordare

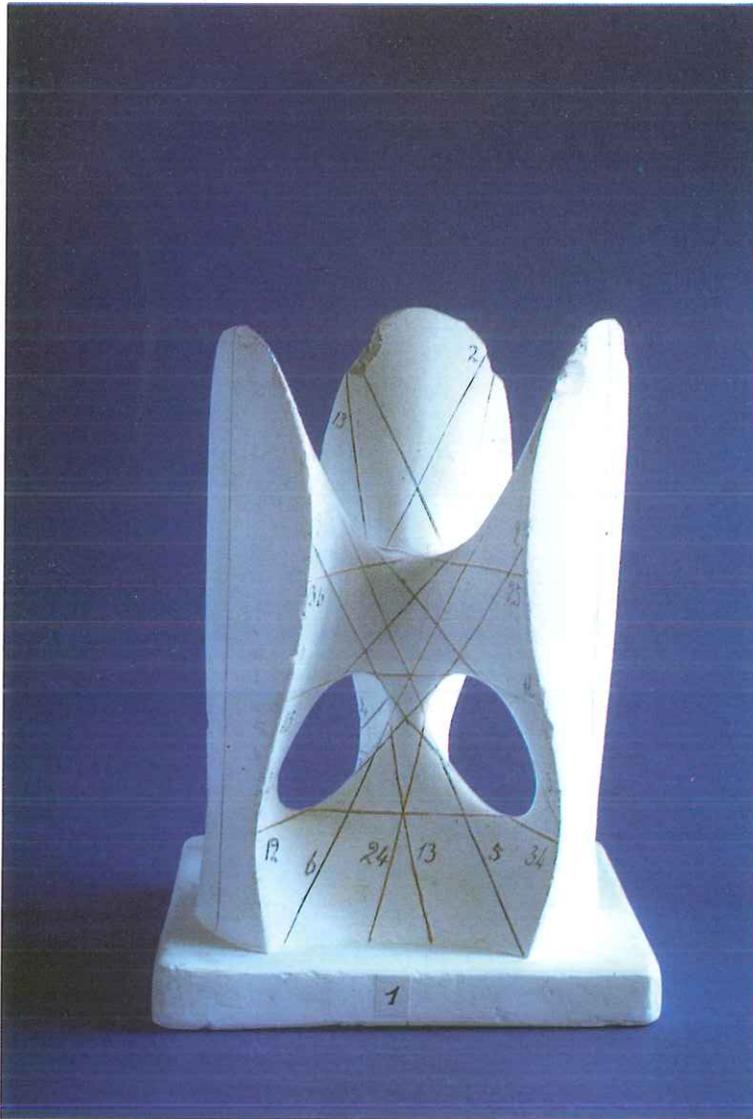
Cundy-Rollet, *I modelli matematici*, Milano, Feltrinelli, 1974.

e a rinviare anche in questo caso alla bibliografia ivi contenuta.

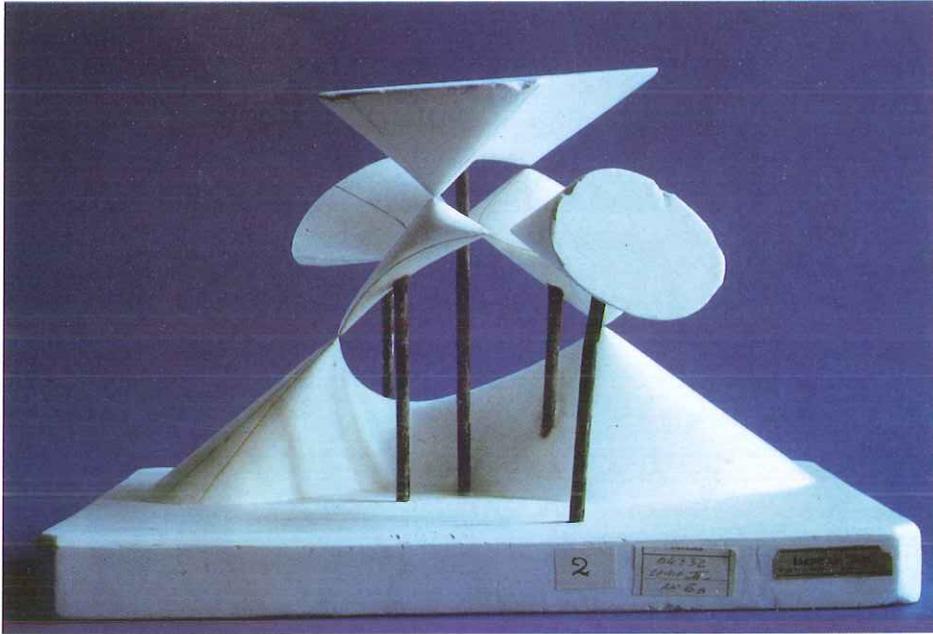
L.Carbone: Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" -
Università degli Studi di Napoli "Federico II".

G.Cardone: Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II".

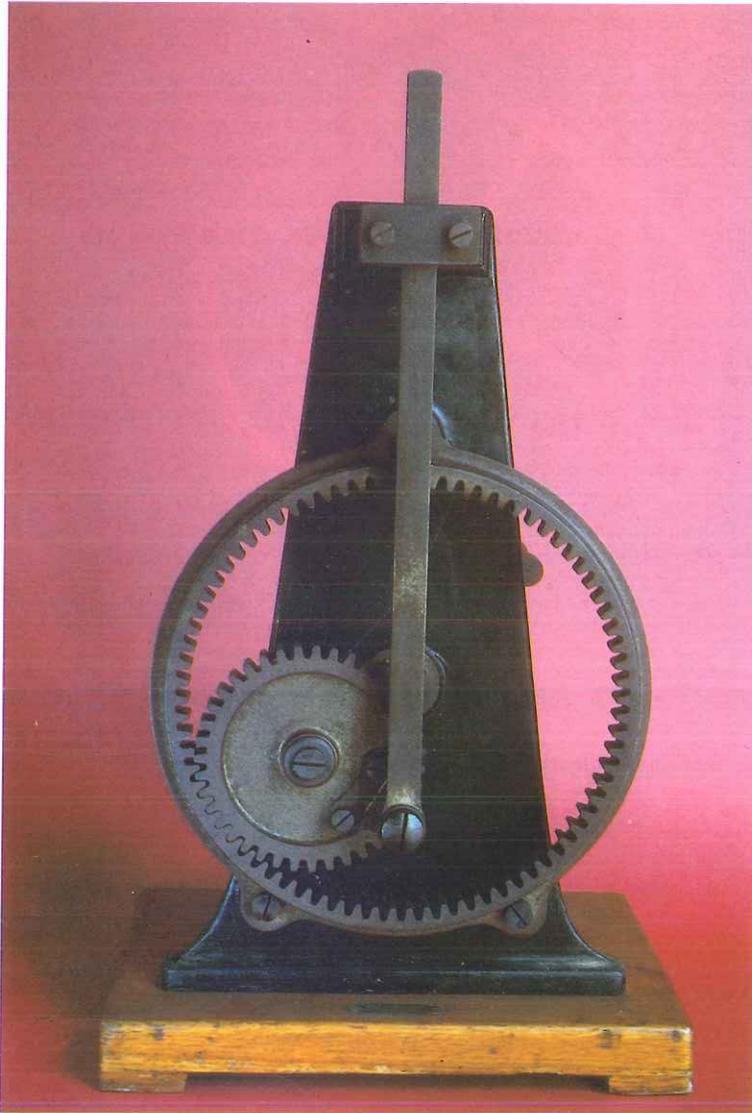
F.Palladino: Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica
Applicata - Università degli Studi di Salerno.



Superficie diagonale di Clebsch. È una superficie del 3° ordine senza punti singolari su cui giacciono "rette diagonali", da cui il nome.
(Verl. v. L. Brill, Serie VII, n. 1).



Superficie di Kummer con otto punti doppi reali. È una superficie del 4° ordine.
(Verl. v. L. Brill, Serie II, n. VI b).



Strumento per la verifica di una proprietà delle Ipocicloidi:
se una circonferenza rotola senza strisciare all'interno di un'altra circonferenza di raggio
doppio, ogni punto su di essa descrive un segmento di retta.
(*Société Genivoise pour la construction d'instrumentes de physique. Geneve*).



Ellissografo (o compasso ellittico): strumento in acciaio e ottone per il tracciamento di ellissi.

(Verl. v. M. Schilling, Halle a. S.).



Una delle bacheche contenenti le collezioni di modelli in gesso.

IMPROVING INTEGRAL INEQUALITIES RELATED
TO LEVEL SETS

NOTA DI ANNA VERDE

PRESENTATA DAL SOCIO CARLO SBORDONE

ADUNANZA DEL 30/3/1996

Riassunto. Si studia una classe di disuguaglianze e viene data un' applicazione dei risultati ottenuti a due versioni distinte del lemma di Gehring negli spazi di Orlicz.

Abstract. We study a class of inequalities and we give an application of the results obtained to two different versions of Gehring's lemma in the Orlicz spaces.

Key words and phrases: Orlicz spaces.

This work has been supported by M.U.R.S.T. (40%).

§1. Introduction

In this paper we study two types of inequalities, namely

$$(1.1) \quad \int_{\{f>t\}} F(f) dx \leq \alpha A(t) \int_{\{f>t\}} f dx + \beta \int_{\{h>t\}} F(h) dx + \gamma F(t) |\{f > t\}|$$

with $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ and $\gamma \geq 0$, such that $1 < \frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\gamma-1}$ and then

$$(1.2) \quad \int_{\{f \leq t\}} F(f) dx \leq \alpha t \int_{\{f>t\}} A(f) dx + \beta \int_{\{f \leq t\}} f A(h) dx + \gamma t \int_{\{f>t\}} A(h) dx$$

with $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, where $F(t) = tA(t)$ is a convex function, $A : R^+ \rightarrow R^+$, $A(0) = 0$ is a continuous, non decreasing function, satisfying the Δ_2 condition and f, h are nonnegative functions, belonging to the Orlicz space $L_F(R^n)$.

Our aim is to show that, in these hypotheses, the function f satisfies the inequality (1.1) with $F(t) = tA^p(t)$ for a certain $1 < p < p_0$ and in the second case f satisfies a inequality of the following type

$$\int_{R^n} f A^{1-\epsilon}(f) dx \leq k \int_{R^n} h A^{1-\epsilon}(h) dx$$

with $k = k(\alpha, \beta, \gamma)$ and $0 < \epsilon < \epsilon_0(\alpha, \beta, \gamma)$.

Let us see two examples we think to be more interesting. We consider $A(t) = t, \beta = \gamma = 0$. We obtain two symmetrical inequalities, that is

$$\int_{\{f>t\}} f^2 dx \leq \alpha t \int_{\{f>t\}} f dx$$

and

$$\int_{\{f \leq t\}} f^2 dx \leq \alpha t \int_{\{f>t\}} f dx$$

We at once observe that in the first inequality we put out $A(t) = t$, while only t in the second.

In the first case let us suppose $f \in L^2(R^n)$.

We multiply both sides of the inequality for $t^{\epsilon-1}$ and integrate from 0 to ∞

$$\int_0^{\infty} t^{\epsilon-1} \int_{\{f>t\}} f^2 dx dt \leq \alpha \int_0^{\infty} t^{\epsilon} \int_{\{f>t\}} f dx dt$$

By the Fubini theorem we get

$$\int_{R^n} f^2 \int_0^f t^{\epsilon-1} dt dx \leq \alpha \int_{R^n} f \int_0^f t^{\epsilon} dt dx$$

Now since

$$\int_{R^n} f^2 \int_0^f t^{\epsilon-1} dt dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{R^n} f^{2+\epsilon} dx$$

and

$$\int_{R^n} f \int_0^f t^{\epsilon} dt dx = \frac{1}{\epsilon+1} \int_{R^n} f^{2+\epsilon} dx$$

we have

$$\int_{R^n} f^{2+\epsilon} dx \leq \alpha \frac{\epsilon}{\epsilon+1} \int_{R^n} f^{2+\epsilon} dx$$

Therefore if we suppose $f \in L^{2+\epsilon}$ we obtain $f = 0$ for

$$0 \leq \epsilon < \epsilon_0 = \frac{1}{\alpha-1}$$

In the second case let us suppose $f \in L'(R^n)$. We multiply both sides of the inequality for $t^{-\epsilon-1}$ and integrate from 0 to ∞

$$\int_0^{\infty} t^{-\epsilon-1} \int_{\{f \leq t\}} f^2 dx dt \leq \alpha \int_0^{\infty} t^{-\epsilon} \int_{\{f > t\}} f dx dt$$

By the Fubini theorem we get

$$\int_{R^n} f^2 \int_f^{\infty} t^{-\epsilon-1} dt dx \leq \alpha \int_{R^n} f \int_0^f t^{-\epsilon} dt dx$$

Now since

$$\int_{R^n} f^2 \int_f^{\infty} t^{-\epsilon-1} dt dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{R^n} f^{2-\epsilon} dx$$

and

$$\int_{R^n} f \int_0^f t^{-\epsilon} dt dx = \frac{1}{1-\epsilon} \int_{R^n} f^{2-\epsilon} dx$$

we obtain

$$\int_{R^n} f^{2-\epsilon} dx \leq \alpha \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \int_{R^n} f^{2-\epsilon} dx$$

Therefore if we suppose $f \in L^{2-\epsilon}(R^n)$ we obtain $f = 0$ for $0 \leq \epsilon < \epsilon_0 = \frac{1}{\alpha+1}$.

Let us observe that for $\alpha = \beta = 0$, we reobtain a result by Kinnunen with best constant. Moreover for $\gamma = 0$ we get a generalization of Gehring's inequality, without using the Stieltjes' integrals (see [GIS]).

§2. Notation and preliminaries.

Let $F : R^+ \rightarrow R^+$ be a convex function of the form $F(t) = tA(t)$, where A is an increasing function with $A(0) = 0$. Throughout we assume that A satisfies the Δ_2 -condition, that is,

$$(2.1) \quad A(2t) \leq kA(t)$$

for some $k \geq 1$ and all $t \geq 0$. Notice the following inequality for the inverse function

$$(2.2) \quad F^{-1}(x+y) \leq F^{-1}(x) + F^{-1}(y), \quad x, y \in R^+.$$

We also have

$$(2.3) \quad xA(y) \leq F(x) + F(y), \quad x, y \in R^+.$$

The latter is an immediate consequence of the monotonicity of A . This implies another useful inequality

$$(2.4) \quad F^{-1}(x) \leq t + \frac{x}{A(t)}$$

for every $t > 0$ and all $x \geq 0$.

We shall say that the function $f \in L^1_{loc}(R^n)$ belongs to the Orlicz space $L_F(R^n)$ if

$$(2.5) \quad [f]_F = F^{-1} \left[\int_{R^n} F(|f|) dx \right] < \infty.$$

Lemma 2.1 Let ν be a measure and E be a ν -measurable set in R^n with $\nu(E) < \infty$.

If f is a nonnegative ν -measurable function on E , $0 < r < \infty$, $0 \leq a < \infty$ and $F : R^+ \rightarrow R^+$ is convex and satisfying Δ_2 -condition $F(2t) \leq kF(t)$ for $k \geq 1$, then

$$(2.7) \quad \int_{\{f>a\}} F(f) d\nu = \int_a^\infty F'(t) \nu(\{f > t\}) dt + F(a) \nu(\{f > a\}).$$

Proof.

By the Fubini theorem we get

$$\begin{aligned} \int_a^\infty F'(t) \nu(\{f > t\}) dt &= \int_a^\infty \int_{R^n} F'(t) \chi_{\{f>t\}} d\nu dt \\ &= \int_{R^n} \int_a^\infty F'(t) \chi_{\{f>t\}} dt d\nu \\ &= \int_{\{f>a\}} \int_a^f F'(t) dt d\nu = \int_{\{f>a\}} F(f) d\nu - F(a) \nu(\{f > a\}) \end{aligned}$$

and the equality is proved.

§3. The main theorem.

Theorem 3.1 Let $F(t) = tA(t)$ be convex, where $A : R^+ \rightarrow R^+$, $A(0) = 0$ is continuously increasing and satisfy the Δ_2 -condition. Suppose that nonnegative functions $f, h \in L_F(R^n)$ satisfy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} &\int_{\{f>t\}} f A(f) dx \\ &\leq \alpha A(t) \int_{\{f>t\}} f dx + \beta \int_{\{h>t\}} h A(h) dx + \gamma t A(t) |\{f > t\}| \end{aligned}$$

$\forall t \geq a$, where $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ and $\gamma \geq 0$, with $1 < \frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\gamma-1}$, are independent of t and the functions f and h .

Then

$$\begin{aligned}
 & \int_{\{f>t\}} f A^p(f) dx \\
 & \leq \frac{\alpha}{p-\alpha(p-1)-\gamma(p-1)} A^p(t) \int_{\{f>t\}} f dx \\
 & + \frac{\beta p}{p-\alpha(p-1)-\gamma(p-1)} \int_{\{h>t\}} h A^p(h) dx \\
 (3.3) \quad & + \frac{\gamma}{p-\alpha(p-1)-\gamma(p-1)} t A^p(t) |\{f > t\}|
 \end{aligned}$$

$\forall p, 1 < p < \frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\gamma-1}$ and $\forall t \geq a > 0$.

Proof.

We multiply both sides of (3.2) by $A^{p-2}(t) A'(t)$ and integrate from α to ∞

$$\begin{aligned}
 & \int_a^\infty A^{p-2}(t) A'(t) \int_{\{f>t\}} f A(f) dx dt \\
 & \leq \alpha \int_a^\infty A^{p-1}(t) A'(t) \int_{\{f>t\}} f dx dt \\
 & + \beta \int_a^\infty A^{p-2}(t) A'(t) \int_{\{h>t\}} h A(h) dx dt \\
 & + \gamma \int_a^\infty t A^{p-1}(t) A'(t) |\{f > t\}| dt.
 \end{aligned}$$

We observe that

$$\begin{aligned}
 & \int_a^\infty t A^{p-1}(t) A'(t) |\{f > t\}| dt \\
 & = \int_a^\infty \int_{R^n} t A^{p-1}(t) A'(t) \chi_{\{f>t\}} dx dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\{f>a\}} \int_a^f t A'(t) A^{p-1}(t) dt dx \\
&= \frac{1}{p} \int_{\{f>a\}} f A^p(f) dx - \frac{1}{p} a A^p(a) |\{f > a\}| \\
&\quad - \frac{1}{p} \int_a^\infty A^p(t) |\{f > t\}| dt.
\end{aligned}$$

Let ν be a measure with $d\nu = f dx$. We may apply (2.7) with $d\nu = f dx$. We get

$$\begin{aligned}
&\int_a^\infty A^{p-1}(t) A'(t) \int_{\{f>t\}} f dx dt \\
&= \int_a^\infty A^{p-1}(t) A'(t) \nu(\{f > t\}) dt \\
&= \int_{\{f>a\}} \int_a^f A^{p-1}(t) A'(t) dt d\nu \\
&= \frac{1}{p} \int_{\{f>a\}} A^p(f) f dx - \frac{1}{p} A^p(a) \int_{\{f>a\}} f dx.
\end{aligned}$$

Let ν be a measure with $d\nu = F(h) dx$. The formula (2.7) with $d\nu = F(h) dx$ yields

$$\begin{aligned}
&\int_a^\infty A^{p-2}(t) A'(t) \int_{\{h>t\}} F(h) dx dt \\
&= \int_a^\infty A^{p-2}(t) A'(t) \nu(\{h > t\}) dt \\
&= \int_{\{h>a\}} \int_a^h A^{p-2}(t) A'(t) dt d\nu \\
&= \frac{1}{p-1} \int_{\{h>a\}} A^{p-1}(h) F(h) dx
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{p-1}A^{p-1}(a)\int_{\{h>a\}}F(h)dx.$$

Now we consider a measure ν with $d\nu = F(f)dx$. By (2.7) we get

$$\begin{aligned} & \int_a^\infty A^{p-2}(t)A'(t)\int_{\{f>t\}}fA(f)dxdt \\ &= \int_a^\infty A^{p-2}(t)A'(t)\nu(\{f>t\})dt \\ &= \frac{1}{p-1}\int_{\{f>a\}}A^{p-1}(f)F(f)dx - \frac{1}{p-1}A^{p-1}(a)\int_{\{f>a\}}F(f)dx. \end{aligned}$$

Combining the previous expressions we obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\{f>a\}}fA^p(f)dx \\ &= (p-1)\int_a^\infty A^{p-2}(t)A'(t)\int_{\{f>t\}}F(f)dxdt \\ & \quad + A^{p-1}(a)\int_{\{f>a\}}F(f)dx \\ & \leq \alpha\frac{(p-1)}{p}\int_{\{f>a\}}fA^p(f)dx - \alpha\frac{(p-1)}{p}A^p(a)\int_{\{f>a\}}f dx \\ & \quad + \beta\int_{\{h>a\}}A^{p-1}(h)F(h)dx \\ & \quad - \beta A^{p-1}(a)\int_{\{h>a\}}F(h)dx + \gamma\frac{(p-1)}{p}\int_{\{f>a\}}fA^p(f)dx \\ & \quad - \gamma\frac{(p-1)}{p}aA^p(a)|\{f>a\}| \\ & \quad - \gamma\frac{(p-1)}{p}\int_a^\infty A^p(t)|\{f>t\}|dt + A^{p-1}(a)\int_{\{f>a\}}F(f)dx. \end{aligned}$$

Now by (3.2)

$$\begin{aligned} & \left(1 - \alpha \frac{p-1}{p} - \gamma \frac{p-1}{p}\right) \int_{\{f>a\}} f A^p(f) dx \\ & \leq \beta \int_{\{h>a\}} h A^p(h) dx + \frac{\alpha}{p} A^p(a) \int_{\{f>a\}} f dx \\ & \quad + \frac{\gamma}{p} a A^p(a) |\{f > a\}|. \end{aligned}$$

We conclude that

$$\begin{aligned} & \int_{\{f>a\}} f A^p(f) dx \\ & \leq \frac{\alpha}{p - \alpha(p-1) - \gamma(p-1)} A^p(a) \int_{\{f>a\}} f dx \\ & \quad + \frac{\beta p}{p - \alpha(p-1) - \gamma(p-1)} \int_{\{h>a\}} h A^p(h) dx \\ & \quad + \frac{\gamma}{p - \alpha(p-1) - \gamma(p-1)} a A^p(a) |\{f > a\}| \quad \forall p, p < \frac{\alpha + \gamma}{\alpha + \gamma - 1}. \end{aligned}$$

We have proved the claim only for $t = \alpha$, but it is clear that the same proof applies to every $t \geq \alpha$, and hence the lemma follows.

Remark 3.2. For $\alpha = \beta = 0$ we reobtain the Kinnunen's results, that is from

$$(3.5) \quad \int_{\{f>t\}} F(f) dx \leq \gamma F(t) |\{f > t\}| \quad \forall t \geq a > 0$$

we get

$$(3.6) \quad \int_{\{f>t\}} f A^p(f) dx \leq \frac{\gamma}{p - \gamma(p-1)} t A^p(t) |\{f > t\}|$$

$\forall t \geq a, \forall p, 1 < p < \frac{\gamma}{\gamma-1}$. That is optimal in the sense that if $F(t) = t^r$ we find the best possible upper bounds for the higher integrability exponents.

Corollary 3.3

Let $F(t) = tA(t)$ be convex, where $A : R^+ \rightarrow R^+, A(0) = 0$ is continuously increasing and satisfy the Δ_2 -condition. Suppose that nonnegative functions $g, h \in L_F(R^n)$ satisfy

$$(3.8) \quad \int_{\{g>t\}} g A(g) dx \leq \alpha A(t) \int_{\{g>t\}} g dx + \beta \int_{\{h>t\}} h A(h) dx$$

$\forall t \geq a > 0$ where $\alpha > 1$ and β are independent of t and the functions f e h .

Then

$$(3.9) \quad \int_{\{g>t\}} gA^p(g) dx \leq \frac{\alpha}{\alpha - \alpha p + p} A^p(t) \int_{\{g>t\}} g dx$$

$$+ \frac{\beta p}{\alpha - \alpha p + p} \int_{\{h>t\}} hA^p(h) dx$$

$\forall p, 1 < p < \frac{\alpha}{\alpha-1}$ and $\forall t \geq a$.

A first generalization of Gehring' s inequality is the following proposition.

Proposition 3.4

Let $F(t) = tA(t)$ be convex, where $A : R^+ \rightarrow R^+$, $A(0) = 0$ is continuously increasing and satisfy the Δ_2 -condition. Suppose that nonnegative functions f and $h \in L_F(R^n)$ satisfy

$$(3.11) \quad \int_{\{f>t\}} fA(f) dx \leq \alpha A(t) \int_{\{f>t\}} f dx + \beta \int_{\{h>t\}} hA(h) dx$$

$\forall t \geq a > 0$, where $\alpha > 1$ and β are independent of t and the functions f and h .

Then

$$(3.12) \quad \int_{R^n} fA^p(f) dx \leq \frac{\beta p}{\alpha - \alpha p + p} \int_{R^n} hA^p(h) dx$$

$\forall p, 1 < p < \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Proof.

We multiply both sides of (3.11) by $A^{p-2}(t) A'(t)$ and integrate from 0 to ∞

$$\int_0^\infty A^{p-2}(t) A'(t) \int_{\{f>t\}} fA(f) dx dt$$

$$\leq \alpha \int_0^\infty A^{p-1}(t) A'(t) \int_{\{f>t\}} f dx dt$$

$$+ \beta \int_0^\infty A^{p-2}(t) A'(t) \int_{\{h>t\}} hA(h) dx dt$$

If $d\nu = F(f) dx$ then we apply (2.7) with $d\nu = F(f) dx$ and we get

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} A^{p-2}(t) A'(t) \int_{\{f>t\}} F(f) dx dt \\
 &= \int_0^{\infty} A^{p-2}(t) A'(t) \nu(\{f > t\}) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \int_{R^n} A^{p-2}(t) A'(t) \chi_{\{f>t\}} d\nu dt \\
 &= \int_{R^n} \int_0^f A^{p-2}(t) A'(t) dt d\nu \\
 &= \frac{1}{p-1} \int_{R^n} A^{p-1}(f) d\nu - \frac{1}{p-1} \int_{R^n} A^{p-1}(0) d\nu \\
 &= \frac{1}{p-1} \int_{R^n} A^{p-1}(f) F(f) dx.
 \end{aligned}$$

Now we consider a measure ν such that $d\nu = f dx$. The formula (2.7) yields

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} A'(t) A^{p-1}(t) \int_{\{f>t\}} f dx dt \\
 &= \int_0^{\infty} A^{p-1}(t) A'(t) \nu(\{f > t\}) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \int_{R^n} A^{p-1}(t) A'(t) \chi_{\{f>t\}} d\nu dt \\
 &= \int_{R^n} \int_0^f A^{p-1}(t) A'(t) dt d\nu \\
 &= \frac{1}{p} \int_{R^n} f A^p(f) dx - \frac{1}{p} A^p(0) \nu(\{f > t\})
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p} \int_{R^n} f A^p(f) dx.$$

Finally if $d\nu = F(h) dx$ then by (2.7) we get

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty A^{p-2}(t) A'(t) \int_{\{h>t\}} h A(h) dx dt \\ &= \int_0^\infty A^{p-2}(t) A'(t) \nu(\{h > t\}) dt \\ &= \int_0^\infty \int_{R^n} A^{p-2}(t) A'(t) \chi_{\{h>t\}} d\nu dt \\ &= \int_{R^n} \int_0^f A^{p-2}(t) A'(t) dt d\nu \\ &= \frac{1}{p-1} \int_{R^n} A^{p-1}(h) d\nu - \frac{1}{p-1} \int_{R^n} A^{p-1}(0) d\nu \\ &= \frac{1}{p-1} \int_{R^n} A^{p-1}(h) F(h) dx. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \int_{R^n} f A^p(f) dx &= \int_{R^n} A^{p-1}(f) F(f) dx \\ &= (p-1) \int_0^\infty A^{p-2}(t) A'(t) \int_{\{f>t\}} f A(f) dx dt \\ &\quad - A^{p-1}(0) \int_{R^n} F(f) dx \\ &\leq \alpha \frac{p-1}{p} \int_{R^n} A^p(f) f dx + \beta \int_{R^n} h A^p(h) dx \end{aligned}$$

so we obtain

$$\begin{aligned} & \int_{R^n} f A^p(f) dx \\ &\leq \frac{\beta p}{\alpha - \alpha p + p} \int_{R^n} h A^p(h) dx \end{aligned}$$

$\forall p, 1 < p < \frac{\alpha}{\alpha-1}$ which is the desired inequality.

Another application of the main theorem is the following proposition which is a second generalization of Gehring's inequality proved by Iwaniec with the Stiltjes' integrals.

Proposition 3.5

Suppose that Q is an n -cube in R^n ; that $f : Q \rightarrow [0, \infty[$ is of the class $L_F(Q)$. We extend f by letting it be zero outside of Q . Assume for $c > 1$ the inequality

$$(3.14) \quad \int_{\{f>t\}} F(f) dx \leq c \frac{F(t)}{t} \int_{\{f>t\}} f dx$$

$\forall t \geq a > 0$. Then there exists $p_0 = p_0(c, n, F) > 1$ such that

$$(3.15) \quad \int_{\{f>t\}} \frac{F^p(f)}{f^{p-1}} dx \leq \frac{F^{p-1}(t)t^{1-p}}{c-p(c-1)} \int_{\{f>t\}} F(f) dx$$

$\forall 1 < p < p_0$ and $\forall t \geq a$.

Proof.

We multiply both sides of (3.14) for $H^{p-2}(t)H'(t)$, where $H(t) = \frac{F(t)}{t}$, and integrate from a to ∞

$$\begin{aligned} & \int_a^\infty H^{p-2}(t)H'(t) \int_{\{f>t\}} F(f) dx dt \\ & \leq c \int_a^\infty H^{p-1}(t)H'(t) \int_{\{f>t\}} f dx dt. \end{aligned}$$

We consider a measure ν with $d\nu = F(f) dx$. By (2.7) we get

$$\begin{aligned} & \int_{\{f>a\}} H^{p-1}(f) F(f) dx \\ & = (p-1) \int_a^\infty H^{p-2}(t)H'(t) \int_{\{f>t\}} F(f) dx dt \\ & \quad + H^{p-1}(t) \int_{\{f>a\}} F(f) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c(p-1) \int_a^\infty H^{p-1}(t) H'(t) \int_{\{f>t\}} f dx dt \\ &\quad + H^{p-1}(a) \int_{\{f>a\}} F(f) dx. \end{aligned}$$

If $d\nu = f dx$ then by (2.7) we get

$$\begin{aligned} &\int_a^\infty H^{p-1}(t) H'(t) \int_{\{f>t\}} f dx dt \\ &= \frac{1}{p} \int_{\{f>a\}} H^p(f) f dx - \frac{1}{p} H^p(a) \int_{\{f>a\}} f dx. \end{aligned}$$

Therefore we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\{f>a\}} H^p(f) f dx &= \int_{\{f>a\}} H^{p-1}(f) F(f) dx \\ &\leq c \frac{p-1}{p} \int_{\{f>a\}} H^p(f) f dx \\ &\quad - c \frac{p-1}{p} H^p(a) \int_{\{f>a\}} f dx + H^{p-1}(a) \int_{\{f>a\}} F(f) dx. \end{aligned}$$

By (3.14) we get

$$\begin{aligned} &\int_{\{f>a\}} H^p(f) f dx \\ &\leq c \frac{p-1}{p} \int_{\{f>a\}} H^p(f) f dx - \frac{p-1}{p} H^{p-1}(a) \int_{\{f>a\}} F(f) dx \\ &\quad + H^{p-1}(a) \int_{\{f>a\}} F(f) dx \end{aligned}$$

Since $H^p(f) f = \frac{F^p(f)}{f^{p-1}}$ we conclude that

$$\left(1 - c \frac{p-1}{p}\right) \int_{\{f>a\}} \frac{F^p(f)}{f^{p-1}} dx \leq \frac{1}{p} \frac{F^{p-1}(a)}{a^{p-1}} \int_{\{f>a\}} F(f) dx$$

and hence

$$\int_{\{f>a\}} \frac{F^p(f)}{f^{p-1}} dx$$

$$\leq \frac{F^{p-1}(a) a^{1-p}}{c-p(c-1)} \int_{\{f>a\}} F(f) dx \quad \forall p, 1 < p < \frac{c}{c-1}.$$

We have proved the claim for $t = a$, but the same proof applies to every $t \geq a$ and hence the proposition follows.

§4. The case $\{f < t\}$

Theorem 4.1

Let $F(t) = tA(t)$ be convex, where $A : R^+ \rightarrow R^+$, $A(0) = 0$ is continuously increasing and satisfy the Δ_2 -condition. Suppose that nonnegative functions $f, h \in L_F(R^n)$ satisfy

$$(4.1) \quad \int_{\{f \leq t\}} f A(f) dx \leq \alpha t \int_{\{f > t\}} A(f) dx \\ + \beta \int_{\{f \leq t\}} f A(h) dx + \gamma t \int_{\{f > t\}} A(h) dx$$

with $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ independent of t and the functions f, h . Then there exist $\epsilon_0 = \epsilon_0(\alpha, \beta, \gamma) > 0$ and $k = k(\alpha, \beta, \gamma)$ such that

$$(4.2) \quad \int_{R^n} f A^{1-\epsilon}(f) dx \leq k \int_{R^n} h A^{1-\epsilon}(h) dx \quad \forall \epsilon, 0 \leq \epsilon < \epsilon_0$$

Proof.

We multiply both sides of (4.1) by $A'(t)A^{-1-\epsilon}(t)$ and integrate from 0 to ∞

$$\int_0^\infty A'(t)A^{-1-\epsilon}(t) \int_{\{f \leq t\}} f A(f) dx dt \\ \leq \alpha \int_0^\infty t A'(t)A^{-1-\epsilon}(t) \int_{\{f > t\}} A(f) dx dt \\ + \beta \int_0^\infty A'(t)A^{-1-\epsilon}(t) \int_{\{f \leq t\}} f A(h) dx dt \\ + \gamma \int_0^\infty t A'(t)A^{-1-\epsilon}(t) \int_{\{f > t\}} A(h) dx dt.$$

By the Fubini theorem we get

$$\begin{aligned}
 & \int_{R^n} f A(f) \int_f^\infty A'(t) A^{-1-\epsilon}(t) dt dx \\
 & \leq \alpha \int_{R^n} A(f) \int_0^f t A'(t) A^{-1-\epsilon}(t) dt dx \\
 & + \beta \int_{R^n} f A(h) \int_f^\infty A'(t) A^{-1-\epsilon}(t) dt dx \\
 & + \gamma \int_{R^n} A(h) \int_0^f t A'(t) A^{-1-\epsilon}(t) dt dx.
 \end{aligned}$$

We observe that

$$\int_{R^n} f A(f) \int_f^\infty A'(t) A^{-1-\epsilon}(t) dt dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{R^n} f A^{1-\epsilon}(f) dx$$

and

$$\int_{R^n} A(f) \int_0^f t A'(t) A^{-1-\epsilon}(t) dt dx \leq \frac{1}{1-\epsilon} \int_{R^n} f A^{1-\epsilon}(f) dx.$$

Moreover we get

$$\begin{aligned}
 & \int_{R^n} f A(h) \int_f^\infty A'(t) A^{-1-\epsilon}(t) dt dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{R^n} f A(h) A^{-\epsilon}(f) dx \\
 & \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{R^n} f A^{1-\epsilon}(f) dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{R^n} h A^{1-\epsilon}(h) dx
 \end{aligned}$$

because for $f < h$ we get $f A(h) A^{-\epsilon}(f) \leq h A^{1-\epsilon}(h)$ and for $h < f$ we get $f A(h) A^{-\epsilon}(f) \leq f A^{1-\epsilon}(f)$. Finally

$$\begin{aligned}
 & \int_{R^n} A(h) \int_0^f t A'(t) A^{-1-\epsilon}(t) dt dx \leq \frac{1}{1-\epsilon} \int_{R^n} f A^{1-\epsilon}(f) dx \\
 & + \frac{1}{1-\epsilon} \int_{R^n} h A^{1-\epsilon}(h) dx
 \end{aligned}$$

because for $h < f$ we get

$$A(h) \int_0^f t A'(t) A^{-1-\epsilon}(t) dt \leq \frac{1}{1-\epsilon} f A^{1-\epsilon}(f)$$

and for $f < h$ we get

$$A(h) \int_0^f t A'(t) A^{-1-\epsilon}(t) dt \leq \frac{1}{1-\epsilon} h A^{1-\epsilon}(h).$$

Therefore we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \int_{R^n} f A^{1-\epsilon}(f) dx &\leq \frac{\alpha}{1-\epsilon} \int_{R^n} f A^{1-\epsilon}(f) dx \\ &+ \frac{\beta}{\epsilon} \int_{R^n} f A^{1-\epsilon}(f) dx + \frac{\beta}{\epsilon} \int_{R^n} h A^{1-\epsilon}(h) dx \\ &+ \frac{\gamma}{1-\epsilon} \int_{R^n} f A^{1-\epsilon}(f) dx + \frac{\gamma}{1-\epsilon} \int_{R^n} h A^{1-\epsilon}(h) dx. \end{aligned}$$

We conclude that

$$\int_{R^n} f A^{1-\epsilon}(f) dx \leq k \int_{R^n} h A^{1-\epsilon}(h) dx$$

with

$$k = \frac{1 - \epsilon(\beta - \gamma)}{1 - \epsilon(1 + \alpha - \beta + \gamma)} \quad \text{and} \quad \epsilon_0 = \frac{1 - \beta}{\alpha + \gamma + 1 - \beta}.$$

§5. Some maximal inequalities.

In the recent literature ([L,GIS,S]) inequality (1.2) has been considered replacing formally $\{g > t\}$ by $\{Mg > t\}$, $\{g \leq t\}$ by $\{Mg \leq t\}$. Similarly inequality (1.1) has been applied by [K] (for $\alpha = \beta = 0$) replacing the sets $\{g > t\}$ by $\{Sg > t\}$ where S is the Riesz operator. It is interesting to consider more general operators T instead of M or S . But this will be studied in a subsequent paper.

References

- [GIS] L. GRECO, T.IWANIEC and C.SBORDONE, *Variational Integrals of Nearly Linear Growth*, Preprint del Dipartimento R. Caccioppoli, Napoli (1995).
- [G] F.W.GEHRING, *The L^p integrability of the partial derivatives of a quasi-conformal mapping*, Acta Math. 130 (1973), 265-277.
- [K] J.KINNUNEN, *Sharp results on reverse Holder inequality*, Annal. Acad. Sci. Fennicae, ser A, Math. Dissertation, 95 (1995), 1-34.
- [KR] M.A.KRASNOSEL'SKII and YA.B.RUTICKII, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordoff, Groningen (1961).
- [L] J. LEWIS, *On very weak solutions of certain elliptic systems*, Comm. Part. Diff. Equ.,18 (9&10) (1993), 1515-1537.
- [RR] M.M RAO and Z.D. REN, *Theory of Orlicz spaces*, Marcel Dekker (1991).
- [S] C. SBORDONE, *Maximal inequalities and applications to regularity problems in the Calculus of Variations*, in Progress in PDE: the Metz Survey3 ed. by Chipot, Pitman res. notes in Math. Series, (1995).

Author's Address

A.Verde: Dipartimento di Matematica e Applicazioni
"R.Caccioppoli" Università "Federico II" di
Napoli-Complesso di Monte Sant'Angelo, Via
Cinthia-80126 Napoli.
e-mail : Averde@matna2.dma.unina.it

AVANFOSSE MIOCENICHE DELL'APPENNINO MERIDIONALE (ITALIA)

Nota di

Pescatore Tullio*, Pinto Felice**, Renda Pietro***, Senatore M. Rosaria#,
Tramutoli Mariano## & Valente Alessio#

Adunanza del 4 maggio 1996

Key words: Stratigraphy, sedimentology, foredeep basin, Miocene, Southern Apennine.

Abstract - Stratigraphical and sedimentological studies of the sedimentary successions found in the Campania-Lucania sector of Southern Apennines has allowed reconstructing the evolution of the foredeep basins during the Miocene.

In particular, three large bends have been individuated where the following units outcrop respectively from east to west:

a) the outer tectonic units (Lagonegrese Unit of Campomaggiore and Daunia Unit) characterised by basin or slope/basin facies and lying tectonically on Plio-Pleistocene terrains of the Bradano Foredeep;

b) the inner tectonic units characterised by slope/basin facies (Lagonegrese Unit of Monte Arioso and Monte Coppe Unit) and basin facies (Lagonegrese Unit of Groppa d'Anzi and Fortore Unit), lying tectonically on the outer units and underlying the South-Apennine Platform units (mainly carbonate platform facies);

c) the tectonic units outcropping on the Tyrrhenian side characterised by basin facies (Cilento Flysch), lying tectonically on the South-Apennine Platform units in northern sectors and unconformable lying on the terrains with ophiolites, referred to an oceanic domain in southern sectors.

On the basis of the age of the successions and on their reciprocal geometric relationships, two important phases have been delineated during the evolution of the foredeep of this sector of the Southern Apennines: the first, in the Early Miocene, during which the foredeep is represented by the Cilento Basin confined between the orogenic margin to the west and the South-Apennine Platform eastward; the second, in the Middle Miocene, during which - following a shifting of the orogenic front towards north-east - the foredeep is represented by the Irpinian basin located in part on the South-Apennine Platform and Lagonegro Basin - already

* Dipartimento di Fisica Teorica, Sezione Scienze della Terra - Università di Salerno

** Istituto di Ricerca Geomare Sud - C.N.R., Napoli

*** Dipartimento di Geologia e Geodesia, Università di Palermo

Dipartimento di Scienze della Terra - Università Federico II, Napoli

Centro di Geodinamica - Università della Basilicata, Potenza

deformed -, and in part on the central and eastern sectors of the Lagonegro basin, not yet deformed.

The Mesozoic paleogeographic domains with different crust thickness have controlled the Miocene geological history of this sector of the chain. In fact, during the compressive tectonic phases the thrust sheets involved transversely the Mesozoic isopic areas and the different shifting of deformations determinate the complex foredeep basins.

RIASSUNTO - Lo studio stratigrafico e sedimentologico di successioni organizzate in unità tettoniche con definiti rapporti geometrici rinvenute nel settore campano e lucano dell'Appennino meridionale ha consentito di ricostruire l'evoluzione dei bacini di avanzossa durante il Miocene.

In particolare sono state individuate tre larghe fasce dove affiorano rispettivamente, da est verso ovest:

a) le unità tettoniche esterne (Unità Lagonegrese di Campomaggiore ed Unità Dauna) caratterizzate da facies di bacino o di margine di piattaforma, poggianti tettonicamente sui terreni plio-pleistocenici dell'avanzossa bradanica;

b) le unità tettoniche interne caratterizzate da facies di margine di piattaforma (Unità Lagonegrese di Monte Arioso - Unità di Monte Coppe) e di bacino (Unità Lagonegrese di Groppa d'Anzi - Unità del Fortore), sovrapposte tettonicamente alle unità esterne e sottoposte alle unità della Piattaforma Sud-appenninica;

c) le unità tettoniche affioranti nella fascia tirrenica caratterizzate da facies di bacino (Flysch del Cilento), sovrapposte tettonicamente alle unità della Piattaforma Sud-appenninica in settori settentrionali e poggianti in discordanza su terreni con ofioliti riferibili ad un dominio oceanico in settori meridionali.

In base all'età delle successioni e ai loro reciproci rapporti geometrici sono state delineate due importanti fasi durante l'evoluzione dell'avanzossa di questo settore dell'Appennino meridionale: la prima, nel Miocene inferiore, durante la quale l'avanzossa è rappresentata dal Bacino del Cilento confinato tra il margine orogenico ad ovest e la Piattaforma Sud-appenninica ad est; la seconda, nel Miocene medio, durante la quale, dopo una traslazione verso nord-est del fronte orogenetico, l'avanzossa è rappresentata dal Bacino Irpino impostato in parte sulle unità della Piattaforma Sud-appenninica e del Bacino di Lagonegro già deformate ed in parte sui settori centrali ed orientali dello stesso Bacino di Lagonegro non ancora deformati.

I domini paleogeografici mesozoici associati a spessori crostali differenziati hanno controllato la storia geologica miocenica di questo settore della catena appenninica; infatti durante le fasi tettoniche compressive le coltri investivano trasversalmente le zone isopiche mesozoiche, con conseguente modalità e velocità di deformazione diverse, tale da determinare dei bacini di avanzossa complessi.

1. INTRODUZIONE

L'Appennino meridionale è una catena neogenica a falde di ricoprimento (*foreland fold and thrust belt system*), attualmente in prevalente reazione isostatica. Il suo edificio è compreso tra la finestra oceanica del Tirreno meridionale (al di sotto del 41° parallelo) ad ovest, ed il sistema avampaese - avanzossa (Avampaese Apulo e Avanzossa Bradanica) ad est e in flessione verso i quadranti occidentali (Fig. 1).

La catena prende origine dallo scollamento e dal raccorciamento delle coperture sedimentarie, appartenenti a domini paleogeografici meso-cenozoici (piattaforme carbonatiche e bacini pelagici), associati ad una crosta con spessore variabile del margine settentrionale, passivo, afro-adriatico. Lo sviluppo di questa complessa megasutura avviene nel Cenozoico in concomitanza con la tafrogenesi balearica e tirrenica.

Questo lavoro ha lo scopo di tracciare, soprattutto attraverso lo studio stratigrafico e sedimentologico delle coperture sedimentarie, l'evoluzione dei bacini di avanfossa dell'Appennino meridionale durante il Miocene. Questa evoluzione avviene, in un contesto geodinamico di tettonica collisionale e di sviluppo in sequenza della struttura della catena, in connessione alla subduzione di un margine continentale transizionale (a spessore ridotto). Durante la successiva evoluzione post tortoniana della catena, diventa significativa anche la tettonica fuori sequenza.

La traslazione del cuneo di accrezione investe trasversalmente le zone isopiche dell'avampaese e da origine a bacini di avanfossa strutturalmente complessi. Infatti gli stessi domini mesozoici acquistano nello stesso periodo ruoli paleogeografici e strutturali diversi procedendo dalle aree meridionali verso quelle settentrionali.

2. PRECEDENTI CONOSCENZE

I numerosi Autori che hanno studiato il settore meridionale della catena appenninica hanno dato differenti interpretazioni del suo assetto e della geometria dei suoi elementi, mentre è sempre stata condivisa la generale vergenza orientale.

In tutta la prima metà di questo secolo, la prevalenza delle ricerche geologiche in Appennino sono state influenzate dalle idee fissiste riassunte nel lavoro di DE LORENZO (1904), anche se diversi autori descrivono l'esistenza di rapporti di giacitura anomali tra diversi domini di sedimentazione dovuti a tettonica gravitativa con polarità orientale (LIMANOWSKI, 1913; GRZYBOWSKI, 1921; QUITZOW, 1935; ANELLI, 1939).

L'allocaltonia delle unità geologiche, intesa come ricoprimenti gravitativi tra terreni appartenenti a vari domini, viene definitivamente introdotta da SELLI (1962); nella produzione scientifica successiva prenderà sempre più forza il criterio della allocaltonia totale, sino alla formulazione dei primi modelli evolutivi per l'Appennino secondo i concetti della tettonica a zolle (AMODIO MORELLI et al., 1976; PESCATORE, 1978). Recentemente tali concetti sono stati parzialmente modificati con l'intervento del modello della "convergenza zero" (DOGLIONI, 1990; 1991a; 1991b) ove la migrazione del sistema avanfossa -

avampaese è spiegata in virtù dell'arretramento della cerniera di retroflessione della placca litosferica in originaria subduzione verso ovest.

Lo stato attuale delle conoscenze sull'assetto strutturale dell'Appennino meridionale può essere duplicemente inquadrato:

- a) come il risultato di una tettonica da "*thrust ramping*" con sistemi di thrust listrici sequenziali (MOSTARDINI & MERLINI, 1986) che interessano l'intero spessore delle coperture sedimentarie solo nei settori interni;

- b) da sistemi di thrust a basso angolo sovrapposti a sistemi profondi più complessi. Questi ultimi, con geometrie di tipo "duplex", coinvolgono l'avampaese apulo, strutturato alla base della catena (CELLO et al., 1987; CELLO & NUR, 1988; PATACCA & SCANDONE, 1987;1989; CARBONE et al., 1988), o anche la stessa Moho (CASERO et al., 1988).

In ambedue gli assetti è sempre possibile ricondurre, in via schematica, questo settore di catena a tre elementi tettonici regionali (fig.1):

1. Il più basso è costituito da unità cenozoiche e mesozoiche di bacino (Bacino Irpino e Bacino di Lagonegro), a struttura imbricata. Tale elemento giace direttamente sui sedimenti dell'Avanfossa Bradanica, dati da depositi plio-quadernari discordanti sulle successioni carbonatiche della Piattaforma Apula.

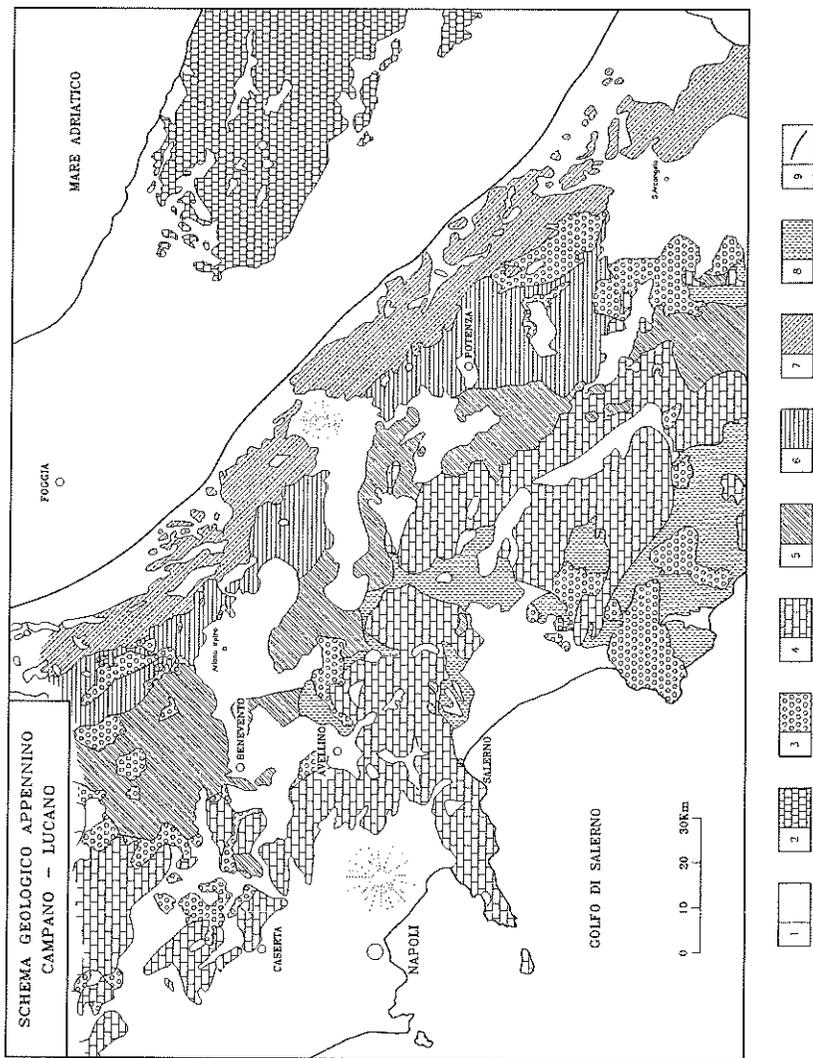
2. L'elemento intermedio consta di un insieme di unità tettoniche impilate, costituite da sedimenti carbonatici mesozoici di piattaforma emioceanica (Piattaforma Sud-appenninica) e da depositi silico-clastici miocenici connessi ai momenti di annegamento degli stessi domini di piattaforma carbonatica.

3. L'elemento più alto ed occidentale è dato da un insieme di terreni depositi nel dominio oceanico della Neotetide e da successioni silico-clastiche mioceniche di bacino (Bacino del Cilento).

I vari modelli proposti per l'edificio appenninico fanno riferimento a differenti modelli paleogeografici:

Fig. 1 - Schema geologico dell'Appennino Meridionale

- 1) Unità mio-plioceniche, pleistoceniche e oloceniche
- 2) Unità Apula
- 3) Unità del Flysch del Cilento e Unità Irpine
- 4) Unità della Piattaforma sud-appenninica
- 5) Unità Lagonegrese di Monte Arioso e Unità di Monte Coppe
- 6) Unità Lagonegrese di Groppa d'Anzi e Unità del Fortore
- 7) Unità di Campomaggiore e Unità Dauna
- 8) Unità interne (Liguridi e Terreni ad affinità sicilide)
- 9) Limite sepolto delle Unità della catena



- ad ovest della Piattaforma Apula, che assumerà il ruolo di avampaese a partire dal Pliocene, vi sarebbe il Bacino di Lagonegro e quindi la Piattaforma Appenninica (OGNIBEN, 1969; PESCATORE & TRAMUTOLI, 1980; PESCATORE & SENATORE, 1986; MOSTARDINI & MERLINI, 1986; PESCATORE, 1988; CASERO et al., 1988);

- il Bacino di Lagonegro avrebbe una posizione più interna e la Piattaforma appenninica sarebbe direttamente legata alla Piattaforma Apula (SELLI, 1962; PATACCA & SCANDONE, 1989; MARSELLA et al., 1992);

- una serie di bacini e piattaforme caratterizzerebbe la paleogeografia mesozoica di questo tratto di catena appenninica (D'ARGENIO et al., 1973; SGROSSO, 1986; 1988).

Molto controversa è anche la posizione delle Unità Sicilidi (D'ARGENIO et al. 1973) o Complesso Sicilide (OGNIBEN, 1969): le successioni riferite a tali unità si sarebbero deposte nel Bacino di Lagonegro secondo alcuni Autori (MOSTARDINI & MERLINI, 1986; PESCATORE et al., 1988; CASERO et al., 1988); secondo altri invece si sarebbero deposte in posizione più interna e sarebbero legate alle Unità Liguridi di origine oceanica (OGNIBEN, 1969; D'ARGENIO et al. 1973; SCANDONE, 1982).

PESCATORE et al. (1988, 1992) individuano come successione Sicilide quella costituita dalle formazioni delle Argille Varicolori e di Corleto Perticara, entrambe passanti verso l'alto alla Formazione delle Tufiti di Tusa e quindi al Flysch Numidico. Questa successione viene considerata "lagonegrese" in quanto in continuità di sedimentazione sui depositi cretacei del Bacino di Lagonegro (Flysch Galestrino). Nel settore occidentale della catena, si rinvengono depositi analoghi, in sovrapposizione tettonica sulle unità della Piattaforma Sud-appenninica (Terreni ad affinità sicilide). Tali depositi vanno nettamente distinti da quelli precedenti in quanto, con ogni probabilità, deposti ad ovest della Piattaforma Sud-appenninica e con una posizione paleogeografica e strutturale corrispondente al Complesso Sicilide di OGNIBEN, 1969 ed alle Unità Sicilidi di D'ARGENIO et al., 1973.

Le Unità di Lagonegro, nel loro complesso, così come risulta dai dati di campagna (finestre tettoniche di Padula, Campagna, Giffoni Vallepiiana etc.) sono sottoposte alle unità tettoniche derivanti dalla deformazione e strutturazione della Piattaforma carbonatica Sud-appenninica (IETTO, 1965; SCANDONE & SGROSSO, 1974; TURCO, 1976), mentre verso est, si rinvengono sovrapposte a quelle dell'avampaese apulo (MOSTARDINI & MERLINI, 1986). Rapporti geometrici analoghi sono stati riconosciuti sia in profili sismici che in pozzi eseguiti per ricerche petrolifere (DONDI & PAPETTI, 1965; MOSTARDINI & MERLINI, 1986; CASERO et al., 1988; LENTINI et al., 1990)

Nei settori occidentali della catena appenninica sono segnalate a luoghi sovrapposizioni di termini delle unità lagonegresi su quelli della Piattaforma Sud-appenninica. Tale rapporto, in accordo con MOSTARDINI & MERLINI (1986)

e CARBONE et al. (1988), viene interpretato come dovuto a retroscorrimenti ovvero a thrust tardivi fuori sequenza.

3. QUADRO PREOROGENO DEL SETTORE IN STUDIO

La paleogeografia preorogena di questo settore della catena, procedendo dalle aree interne verso quelle esterne, riteniamo possa essere così schematizzata (v. fig.9):

1 - Bacino Ligure, ubicato lungo il margine continentale adriatico e sulla zona oceanica adiacente;

2 - Piattaforma carbonatica Sud-appenninica, che divide il Bacino Ligure da quello più esterno lagonegrese, impostata su crosta continentale a spessore "normale";

3 - Bacino di Lagonegro che si sviluppa su di una crosta a spessore ridotto;

4 - Piattaforma Apula ancora su crosta continentale a spessore "normale".

3.1. IL BACINO LIGURIDE

Le successioni meso-cenozoiche deposte nel Bacino Ligure sono rappresentate dalle unità nord-calabresi e dalle unità con terreni ad affinità sicilide (BONARDI et al., 1988), che sono state deformate dalla tettonica paleogenica (KNOTT, 1967; IETTO et al., 1983; MONACO et al., 1991; CRITELLI, 1993).

Le unità nord-calabresi contengono associazioni di rocce ofiolitiche con la loro copertura ed hanno una età compresa tra il Colloviano superiore - Oxfordiano inferiore e l'Oligocene (BONARDI et al., 1988). Tali unità sono a luoghi interessate da un metamorfismo di alta pressione e bassa temperatura riferibile ad una probabile età di 18 Ma.

I terreni ad affinità sicilide sono costituiti da successioni prevalentemente calcareo-clastiche e solo verso l'alto silico-clastiche di età compresa tra il Cretaceo ed il Paleogene.

3.2. LA PIATTAFORMA CARBONATICA SUD-APPENNINICA

Le successioni di piattaforma si sono deposte in un dominio paleogeografico che rappresentava un alto morfologico e strutturale (microcontinente) che separava il Bacino Ligure da quello lagonegrese.

La successione mesozoica è data da depositi carbonatici in facies di retroscogliera, cui si associano depositi di scogliera e di transizione (D'ARGENIO, 1966; CARANNANTE et al., 1994).

Una prima emersione di questo dominio, testimoniata da depositi bauxitici, avviene nel Cretacico superiore (D'ARGENIO, 1974), mentre un più ampio periodo di continentalità si ha nel Paleogene, quando questa piattaforma costituiva un'area emersa tra due bacini.

3.3 IL BACINO DI LAGONEGRO

Nei depositi del Bacino di Lagonegro sono state riconosciute tre successioni che individuano il margine occidentale, le zone assiali e le aree più esterne del bacino. Tali successioni costituiscono tre distinte unità impilate con vergenza orientale (PESCATORE et al., 1988; PESCATORE, 1994) e affioranti sia nell'Appennino lucano in Basilicata che nei Monti del Sannio in Campania (DAZZARO et al., 1988).

3.3.1 Unità lagonegrese di Monte Arioso e Unità di Monte Coppe

Queste unità affiorano nei settori più occidentali nell'Appennino meridionale e nella posizione strutturale più elevata; esse comprendono successioni che rappresentano i prodotti della sedimentazione lungo il margine occidentale del bacino, caratterizzato da depositi calcareo-clastici, provenienti dal margine della Piattaforma Sud-appenninica, intercalati a sedimenti emipelagici silico-marnosi.

Questa successione, nell'Appennino lucano, è continua dal Trias medio al Miocene inferiore. E' data da:

- Formazione di Monte Facito - Trias medio (SCANDONE, 1972; CIARAPICA, et al., 1990);

- Serie calcareo-silico- marnosa (Trias superiore-Cretacico medio), comprende le formazioni dei Calcari a liste e noduli di selce, gli Scisti silicei e il Flysch Galestrino;

- Flysch rosso interno (Cretacico superiore-Miocene inferiore), è costituito da un'alternanza di marne rosse, calcareniti e calciruditi bioclastiche. Questa successione viene indicata come Flysch rosso interno per differenziarla da quella che verrà descritta in seguito;

- Formazione di Paola Doce (Miocene inferiore), è costituita da un'alternanza di argille, argille marnose, calcareniti bioclastiche, arenarie con frammenti vulcanoclastici e arenarie quarzose tipo Flysch Numidico, tale formazione è discordante sul substrato;

- Flysch Numidico, è costituito da arenarie quarzose con intercalazioni pelitiche. L'età è nota in letteratura come aquitaniana (HIEKE MERLIN, 1971),

aquitaniiana-langhiana (SELLI, 1962) o langhiana (CRESCENTI, 1966, BOENZI, CIARANFI & PIERI, 1968; PATACCA et al. 1992).

L'Unità di Monte Coppe, affiorante nel Matese orientale, è costituita solo dalla successione di età cretacico-miocenica.

3.3.2 Unità lagonegrese di Groppa d'Anzi e del Unità del Fortore

Queste unità affiorano lungo la zona centrale della catena appenninica, sia nel settore lucano che nel Sannio; le successioni che le costituiscono, caratterizzate da sedimenti pelitici e calcareo-silico-marnosi, rappresentano il prodotto della sedimentazione lungo il settore assiale del bacino.

Esse comprendono la successione sicilide (PESCATORE et al., 1988) data dalle "Argille Varicolori", dalla Formazione di Corleto Perticara (SELLI, 1962) e superiormente dalle Tufiti di Tusa e dal Flysch Numidico (OGNIBEN, 1969).

L'età di questa sequenza è compresa tra il Cretacico superiore e il Miocene.

Sulla successione di Groppa d'Anzi poggiano in discordanza i terreni di età langhiano-tortoniana riferiti alle Unità Irpine (Flysch di Gorgoglione); su quella del Fortore poggiano i terreni della Formazione di S. Bartolomeo.

3.3.3 Unità lagonegrese di Campomaggiore e Unità Dauna

Le successioni riferite a queste unità affiorano lungo il margine orientale della catena appenninica e comprendono anche i termini del Miocene medio - superiore che, come si dirà in seguito, sono da riferire ad un bacino di avanfossa (Bacino Irpino). Esse rappresentano il prodotto della sedimentazione nelle aree più esterne del Bacino di Lagonegro e sono caratterizzate da depositi argilloso-marnosi con intercalazioni calcareo-clastiche provenienti dal margine interno della Piattaforma Apula.

La successione di Campomaggiore, nell'Appennino lucano, è costituita da:

- Serie calcareo-silico-marnosa; di questa serie affiorano i termini riferiti al Flysch Galestrino;

- Flysch rosso esterno, dato da un'alternanza di calcareniti e marne rosse di età compresa tra l'Oligocene e il Miocene inferiore;

- Flysch Numidico, segue in continuità i depositi prima descritti, ed è costituito da quarzareniti torbiditiche di età langhiana. Alla base della successione sono presenti livelli di arenarie tufitiche dello spessore di qualche metro, analoghe alle Tufiti di Tusa prima descritte (PESCATORE et al., 1992);

- formazione di Serra Palazzo, costituita da depositi calcareo-clastici e silico-clastici di età compresa tra il Langhiano e il Tortoniano.

L'Unità Dauna, affiorante nell'Appennino dauno, è costituita da:

- formazione di Monte Sidone, corrispondente al Flysch rosso esterno e di età oligo-miocenica;

- formazione di Faeto: costituita da calcareniti bioclastiche e marne a foraminiferi di età langhiano-tortoniana che segue in continuità i terreni sottostanti;
- Marne e argille di Toppo Capuana del Tortoniano medio e superiore che chiude la successione.

3.4 LA PIATTAFORMA APULA

I terreni della Piattaforma Apula sono in parte presenti al di sotto delle unità alloctone della catena, ed in parte affiorano sul fronte della catena stessa costituendo l'attuale avampaese. Queste successioni iniziano con depositi evaporitici del Trias superiore (Anidridi di Burano); seguono depositi carbonatici mesozoici e cenozoici di ambiente neritico, con facies simili a quelle della Piattaforma Sud-appenninica (MATTAVELLI & PAVAN, 1965; PAVAN & PIRINI, 1966; MASSE & BORGOMANO, 1987; CIARANFI et al., 1988; RICCHETTI et al., 1988;). Nella successione sono presenti varie lacune stratigrafiche che testimoniano periodi di continentalità.

4. SISTEMA AVANFOSSA-AVAMPAESE DURANTE IL MIOCENE INFERIORE (v. Fig. 9)

4.1 L'AVANFOSSA (Bacino del Cilento)

L'avanfossa del Miocene inferiore si imposta sulle unità nord - calabresi e sui terreni ad affinità sicilide già deformati, ed è caratterizzata da una sedimentazione prevalentemente silico-clastica di provenienza interna e subordinatamente calcareo-clastica di provenienza esterna.

I sedimenti del Bacino del Cilento sono riferiti al Flysch del Cilento, nel quale si riconoscono due differenti successioni: la successione di Monte della Stella e quella di Monte Sacro.

4.1.1 La successione di Monte della Stella (Fig. 2)

E' costituita, nella parte inferiore, da sedimenti silico-clastici torbiditici della Formazione di Pollica, potente oltre 600 m, che da argillosi e siltosi (membro di Cannicchio) diventano via via più grossolani (membro di Pollica). Segue per circa 700 m un alternanza di depositi torbiditici silico-clastici e calcareo-clastici (Formazione di San Mauro, membro A, PESCATORE, 1966) che termina con una megatorbidite calcareo-marnosa di circa 60 m di spessore (MT1); al di sopra sono presenti sedimenti silico-clastici, per lo più grossolani (Formazione di San Mauro, membro B, PESCATORE, 1966) con spessore di oltre 800 m: in

quest'ultimo membro è presente una seconda megatorbidite calcareo-marnosa dello spessore di circa 35 m (MT2).

Questa successione è caratterizzata da una notevole continuità sia laterale sia verticale, anche se i passaggi tra i vari membri avvengono in maniera brusca.

L'età delle formazioni di Pollica e di San Mauro va dal Burdigaliano superiore al Langhiano (AMORE et al., 1988) sebbene le analisi delle microfaune a foraminiferi abbiano dato un'età paleogenica (CIESZKOWSKI et al., 1992). Recentemente il limite superiore è stato portato al Tortoniano inferiore (RUSSO et al., 1995).

I caratteri sedimentologici del membro di Pollica e del membro B della Formazione di San Mauro possono essere assimilati a quelli delle conoidi sottomarine profonde con sviluppo di lobi deposizionali passanti a canali (COCCO et al., 1978; COCCO et al., 1986). Il membro A della Formazione di San Mauro, che separa i due apparati deposizionali prima descritti, rappresenta invece una sedimentazione di piana di bacino con un evidente apporto calcareo-marnoso oltre che silico-clastico (DE PIPPO & VALENTE, 1991; CIESZKOWSKI et al., 1992). L'analisi petrografica (CRITELLI, 1987; CRISCI et al., 1988) ha messo in evidenza una netta diversità di composizione dei sedimenti terrigeni dei due membri della Formazione di San Mauro evidenziando due differenti aree di provenienza degli apporti sedimentari.

Anche nella Formazione di Pollica è significativa la composizione petrografica dei sedimenti: dalla petrofacies arcosico-litica del membro di Cannicchio e della parte più bassa del membro di Pollica si passa ad una petrofacies quarzolitica nella parte alta di quest'ultimo membro (CRITELLI & LE PERA, 1990a). Tale evoluzione sembra legata ad una forte ristrutturazione dell'area di alimentazione (CRITELLI & LE PERA, 1990b)

4.1.2 La successione di Monte Sacro (Fig. 2)

Questa successione è meno potente di quella affiorante a Monte della Stella ed è caratterizzata da diverse superfici di erosione sinsedimentaria (CIESZKOWSKI et al., 1992).

La porzione inferiore è data dalla Formazione di Pollica, costituita da sedimenti silico-clastici dello spessore di 100 m circa (membro di Cannicchio) che verso l'alto divengono via via più grossolani, potenti al massimo 600 m (membro di Pollica).

Segue la Formazione di San Mauro costituita alla base da un'alternanza di arenarie e marne torbiditiche dello spessore di 300 m circa (membro A) e quindi da arenarie e conglomerati per uno spessore di 300 m (membro B); in questa formazione si rinvencono due megastrati calcareo-marnosi correlabili con quelli

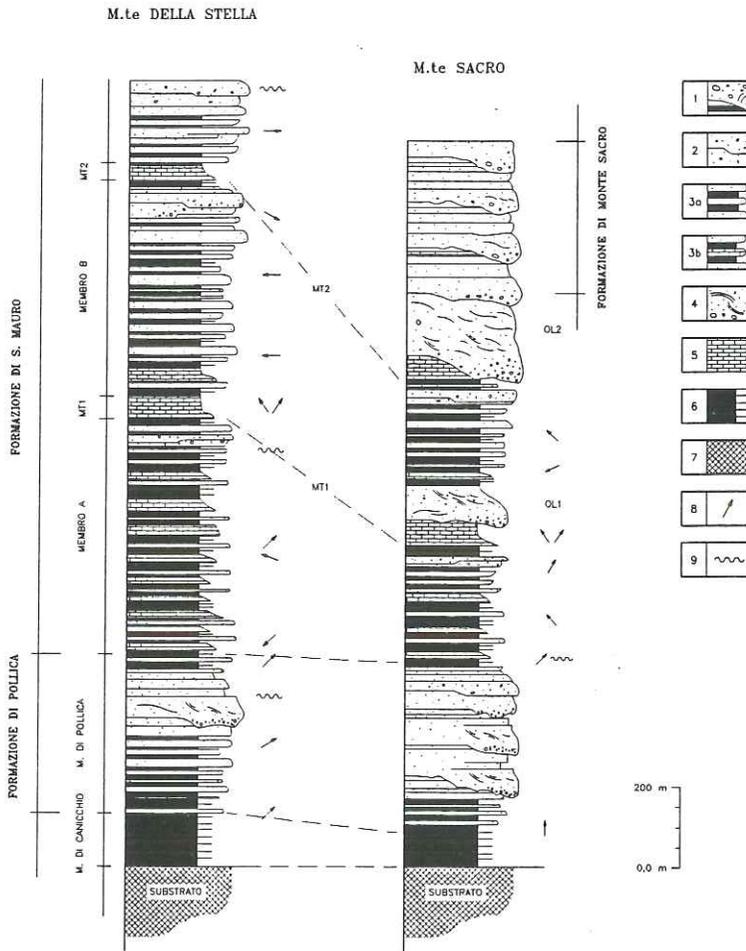


Fig. 2 - Colonne stratigrafiche del Flysch del Cilento

- 1) Conglomerati malstratificati e arenarie conglomeratiche
- 2) Arenarie da grossolane a medie, massive o stratificate
- 3a) Alternanza di arenarie da medie a fini e peliti
- 3b) Alternanza di arenarie, peliti e depositi calcareo-clastici
- 4) Olistostromi
- 5) Megatorbiditi calcaree
- 6) Alternanze di arenarie fini, siltiti e peliti
- 7) Substrato
- 8) Direzione delle paleocorrenti
- 9) Frammenti intraformazionali

descritti per la successione di Monte della Stella. Al di sopra di ciascun megastrato è presente un olistostroma (OL1 e OL2); entrambi gli olistostromi sono composti da materiale estraneo al bacino di sedimentazione (VALENTE, 1991, 1993).

L'età di questa successione va dal Burdigaliano medio-superiore al Langhiano medio-inferiore (AMORE et al., 1988)

Sulla Formazione di San Mauro, in discordanza angolare, poggia la potente serie conglomeratica della Formazione di Monte Sacro (SELLI, 1962; COCCO & PESCATORE, 1975; VALENTE, 1991; 1993), descritta nel paragrafo 5.1.

Le formazioni di Pollica e di San Mauro sono costituite da corpi arenacei grossolani e conglomeratici a geometria fortemente lenticolare, associati a depositi estranei al bacino di sedimentazione (olistostromi); tali caratteri fanno ritenere che questa successione si sia deposta alla base di una scarpata prossima al margine tettonicamente attivo del bacino (CIESZKOWSKI et al., 1992; VALENTE, 1991; 1993).

Al confine calabro-lucano affiora estesamente la Formazione di Albidona che è considerata sia per affinità litologica che per posizione stratigrafica equivalente alla Formazione di San Mauro (ZUPPETTA et al., 1984). Tale correlazione è rafforzata, inoltre, dalla presenza di megastrati carbonatici in ambedue le formazioni (COLELLA & ZUFFA, 1988)

Le direzioni delle paleocorrenti indicano che il materiale silico-clastico del Flysch del Cilento proveniva dal margine sud-occidentale (margine orogenetico), costituito da unità già deformate, mentre i sedimenti calcareo-clastici provenivano dal margine esterno, rappresentato da una piattaforma carbonatica (Piattaforma Sud-appenninica). L'inizio della sedimentazione calcareo-clastica marca la progressiva migrazione dell'avanfossa verso i domini più esterni (CIESZKOWSKI et al., 1995)

4.2 L'AVAMPAESE

Durante questo periodo l'avampaese era rappresentato dai domini paleogeografici che si estendevano dalla Piattaforma carbonatica Sud-appenninica, attraverso il Bacino di Lagonegro, fino alla Piattaforma carbonatica Apula.

4.2.1 Successioni della Piattaforma Sud-appenninica

Il margine esterno dell'avanfossa era rappresentato da un alto morfologico e strutturale (peripheral bulge) costituito dalle successioni mesozoiche e paleogeniche della Piattaforma carbonatica Sud-appenninica dalla quale proveniva il detrito calcareo.

Nelle aree meridionali depositi miocenici poggiano trasgressivi, con contatto paraconcordante, sull'unità della Piattaforma Sud-appenninica. La successione miocenica è costituita alla base da depositi bioclastici e di ambiente neritico tipo "foramol" (Formazione di Cerchiara e Formazione di Roccadaspide) e verso l'alto dapprima da sedimenti emipelagici ricchi di faune planctoniche della Formazione di Capaccio, e quindi torbiditici con rare intercalazioni calcaree della Formazione di Bifurto (SELLI, 1957; PERRONE & SGROSSO, 1981). L'età è Aquitaniano-Langhiano.

I caratteri sedimentari di questa successione indicano l'annegamento di questo settore della piattaforma verso l'avanfossa e verso le aree più meridionali. Successioni simili affiorano in aree settentrionali e più orientali con età via via più recenti, a testimoniare un annegamento progressivo della Piattaforma carbonatica Sud-appenninica verso gli attuali settori settentrionali e quindi lungo una direttrice trasversale rispetto alle fasce isopiche mesozoiche (CARANNANTE et al., 1987).

4.2.2 Successioni del Bacino di Lagonegro (Fig. 3, 4 e 5)

Nel settore meridionale (Appennino lucano) i sedimenti oligo-miocenici del Bacino di Lagonegro, sono dati dalla Formazione di Paoladoce (Unità lagonegrese di Monte Arioso; Fig. 3). Questa formazione è correlabile alle Tufiti di Tusa dell'Unità lagonegrese di Groppa d'Anzi; Le Tufiti di Tusa sono ben esposte a M.te S. Angelo (Fig. 3), dove passano verso l'alto alle quarzareniti del Flysch Numidico.

Nelle aree settentrionali del Bacino di Lagonegro (Appennino sannitico) le successioni oligo-mioceniche sono costituite da depositi calcareo-clastici (Flysch rosso interno) passanti al Flysch Numidico (Unità lagonegrese di Monte Coppe, Fig. 4), o, dalle Tufiti di Tusa che passano al Flysch Numidico (Unità lagonegrese del Fortore); le Tufiti di Tusa passano verso il basso o alle Argille Varicolori o alla formazione di Corleto Perticara (Fig. 5).

Nelle aree più orientali del Bacino di Lagonegro (Unità lagonegrese di Campomaggiore e unità Dauna), infine, la sedimentazione è calcareo-clastica (Flysch Rosso esterno) e passa in continuità dapprima a depositi quarzarenitici (Flysch Numidico) e quindi calcareo-clastici della Formazione di Serra Palazzo (v. Fig. 7) e di Faeto (v. Fig. 8).

4.2.2.1 Formazione di Paola Doce

Questa formazione (PESCATORE et al., 1992) è costituita da una alternanza di argille, marne, calcareniti e megabrecce, cui si alternano a più altezze stratigrafiche, arenarie micacee, arenarie vulcanoclastiche e quarzoareniti di tipo Flysch Numidico. Gli elementi delle megabrecce sono costituiti da calcari

bioclastici provenienti dalla Piattaforma Sud-appenninica. Lo spessore di queste formazioni è compreso tra 150 e 250 m; l'età è del Miocene inferiore (PESCATORE et al., 1992). Corrisponde alle Tufiti di Tusa ed è in discordanza sui terreni sottostanti.

4.2.2. Tufiti di Tusa

Questa formazione rappresenta la parte alta dell'Unità lagonegrese di Groppa d'Anzi ed è costituita da una porzione inferiore arenitico-pelitica caratterizzata da composizioni sia calcareo-clastiche che silico-clastiche e una porzione superiore essenzialmente arenitica con detrito di prevalente natura vulcanogenica di provenienza interna.

Le Tufiti di Tusa seguono in continuità la Formazione delle Argille Varicolori dell'Unità lagonegrese di Groppa d'Anzi (TRAMUTOLI, 1996), dove gli spessori assumono i valori massimi (circa 150 - 200 metri).

L'età è dell'Oligocene superiore - Aquitaniano secondo TRAMUTOLI (1996) o Aquitaniano - Burdigaliano secondo LENTINI (1979) e ZUPPETTA et al. (1984).

4.2.2.3 Flysch Numidico

Il Flysch Numidico è costituito da un'alternanza di quarzoareniti torbiditiche, argille e argille marnose. Lo spessore di questa formazione raggiunge in Lucania il migliaio di metri lungo la zona assiale della catena e va a diminuire verso est e verso nord-est, dove passa stratigraficamente verso l'alto alla Formazione di Serra Palazzo e al Flysch di Facto rispettivamente (PESCATORE & TRAMUTOLI, 1980).

Alla base del Flysch Numidico nella successione lagonegrese di Campomaggiore si rinvengono arenarie tufitiche analoghe a quelle delle Tufiti di Tusa.

La sedimentazione quarzosa si estende verso ovest anche su settori della Piattaforma Sud-appenninica già sprofondati.

L'età di questa formazione è riportata in letteratura come aquitaniana (HIEKE MERLIN et al., 1971), aquitaniano-langhiana (SELLI, 1962) o langhiana (BOENZI et al., 1968; PATACCA et al., 1992).

4.2.3 Successioni della Piattaforma Apula

Le successioni del Paleocene - Miocene inferiore della Piattaforma Apula sono costituite da depositi carbonatici di ambiente neritico e di margine e di scarpata. (RICCHETTI et al., 1988).

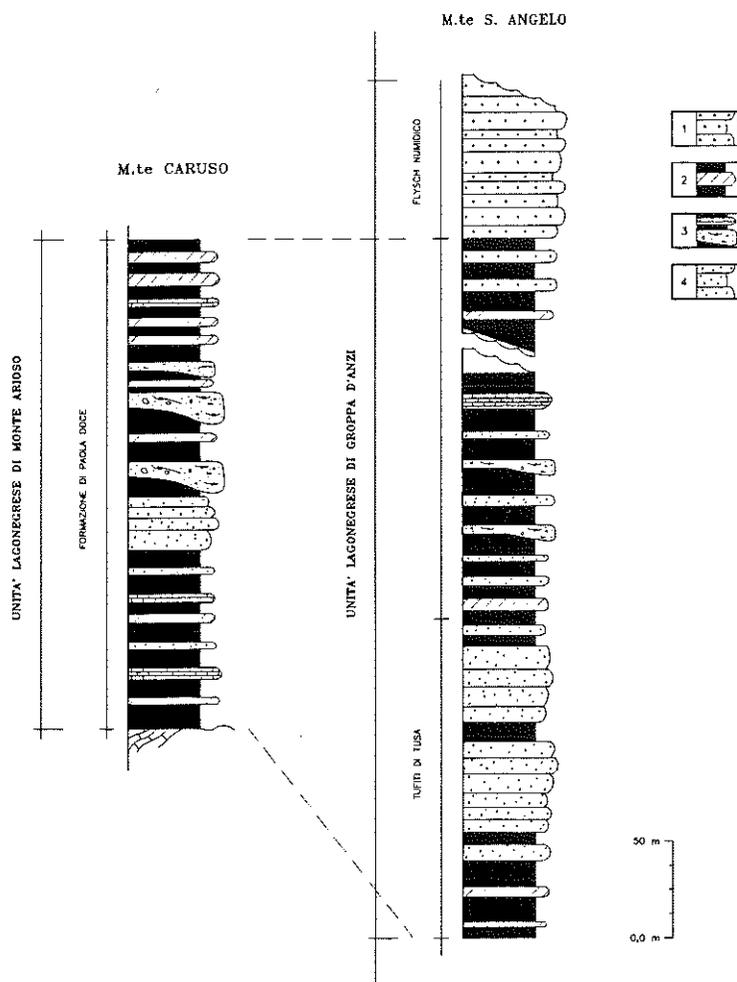


Fig. 3 - Colonne stratigrafiche di Monte Caruso (Formazione di Paola Doce, Unità Lagonegrese di Monte Arioso) e di Monte S. Angelo (Unità Lagonegrese di Groppa d'Anzi)

- 1) Flysch Numidico: quarzareniti intercalate a peliti
- 2) Argille, marne e calcilutiti
- 3) Argille, calcareniti e calciruditi
- 4) Arenarie vulcanoclastiche

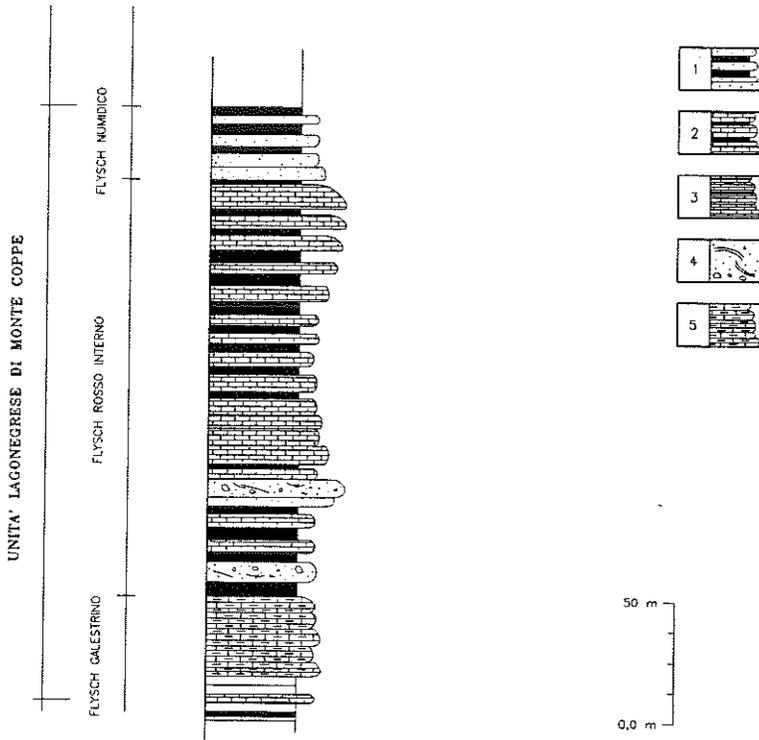


Fig. 4 - Colonna stratigrafica dell'Unità Lagonegrese di Monte Coppe

- 1) Quarzareniti e argille
- 2) Calcareniti, marne e argille di colore rosso
- 3) Calcareniti e calciruditi a luoghi con liste e noduli di selce
- 4) Calcareniti grossolane a struttura massiva

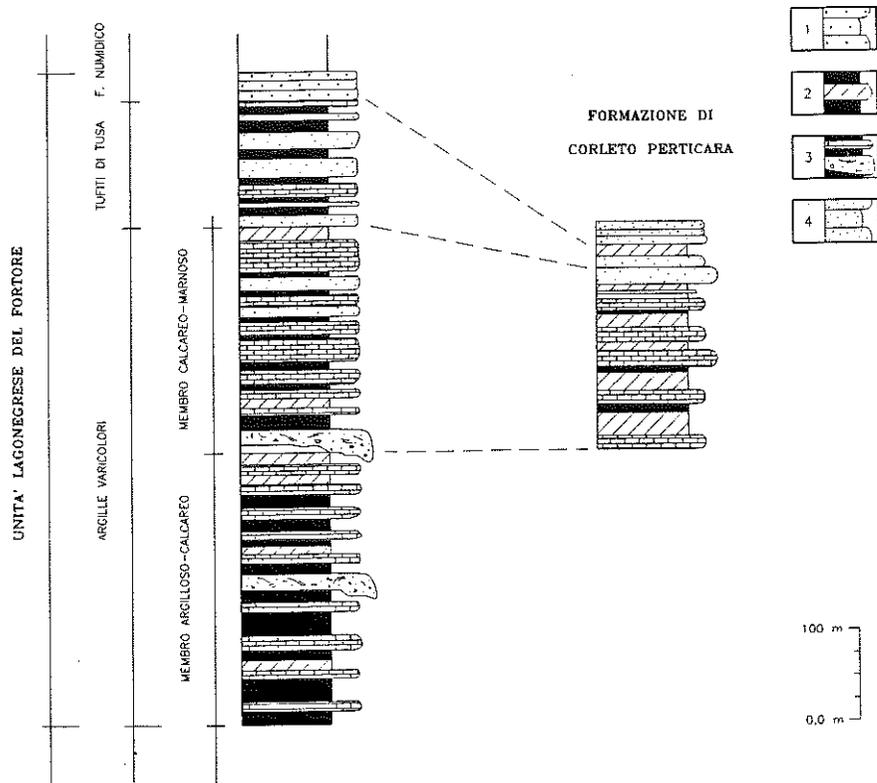


Fig. 5 - Colonne stratigrafiche dell'Unità Lagonegrese del Fortore

- 1) Quarzareniti e argille
- 2) Arenarie vulcanoclastiche
- 3) Marne, calcareniti e argille (Formazione Corleto Perticara)
- 4) Argille rosse e verdi scagliose con intercalazioni di calcareniti e calciruditi (Argille Varicolori)

5. IL SISTEMA AVANFOSSA-AVAMPAESE NEL MIOCENE MEDIO - SUPERIORE

Nel Miocene medio, una importante fase tettonica porta alla scomparsa del bacino di avanfossa del Cilento ed alla individuazione, nell'area del Cilento, di bacini di intracatena; si imposta una nuova avanfossa che risulta più spostata verso l'area di avampaese rispetto alla precedente. Il nuovo bacino di avanfossa (Bacino irpino) è impostato in parte sulla Piattaforma Sud-appenninica ed in parte sul Bacino di Lagonegro (COCCO et al, 1972; PESCATORE, 1978).

5.1 BACINI INTRACATENA

Nel Cilento affiorano depositi del Miocene medio - superiore (Formazione di Monte Sacro, SELLI, 1962), in discordanza angolare sulla Formazione di San Mauro (COCCO & PESCATORE, 1975); tali depositi rappresentano il prodotto della sedimentazione in bacini di intracatena, impostati su settori della catena già in distensione (Fig. 2).

L'intera successione, costituita da conglomerati amalgamati e da arenarie a grana media e grossa, ha uno spessore di circa 600 metri. Le direzioni di apporto dei sedimenti è dai quadranti meridionali (DE PIPPO & VALENTE, 1991)

Dal punto di vista petrografico, la Formazione di Monte Sacro, è caratterizzata da areniti tipicamente arcosiche e da una frazione litica a derivazione granitica (CRITELLI & LE PERA, 1990b). Nella frazione ruditica prevalgono gli elementi ignei su quelli sedimentari (essenzialmente carbonatici) e metamorfici (filladi e micascisti)

La successione sopra descritta rappresenta il prodotto della sedimentazione alla base di una scarpata caratterizzata dalla presenza di canali più o meno incisi ed anastomizzati (VALENTE, 1993).

5.2 L'AVANFOSSA (v. Fig. 9)

Il bacino di avanfossa del Miocene medio-superiore è impostato in parte sulla Piattaforma carbonatica Sud-appenninica ed in parte sui settori occidentali e meridionali del Bacino di Lagonegro che risultano in questo periodo parzialmente strutturati.

L'avanfossa raccoglie, nei settori meridionali e più interni (bacini di piggyback), sedimenti prevalentemente silico-clastici (Flysch di Gorgoglione) provenienti esclusivamente dalle unità della catena.

Nei settori settentrionali ai sedimenti silico-clastici si associano olistoliti carbonatici provenienti dalla Piattaforma Sud-appenninica (Flysch di Castelvete), mentre nei settori più esterni, sono presenti sedimenti silico-clastici e calcareo-clastici della Formazione di Serra Palazzo.

5.2.1 Flysch di Gorgoglione (Fig. 6)

Il Flysch di Gorgoglione (SELLI, 1962; OGNIBEN, 1969; BOENZI & CIARANFI, 1970; VEZZANI, 1975; PESCATORE et al., 1980), affiorante nel settore lucano dell'Appennino meridionale, è costituito da sedimenti prevalentemente arenacei e conglomeratici, depositi da vari tipi di flussi gravitativi, organizzati in sistemi deposizionali ad evoluzione regressiva; esso poggia in discordanza sulle unità lagonegresi. Lo spessore è di circa 1500 m.

Le arenarie sono a composizione prevalentemente quarzoso-feldspatica, tessituralmente immature (CRITELLI & LOJACONO, 1988); esse contengono oltre che frammenti litici anche frammenti vulcanici riferibili a rocce sub-vulcaniche e subordinatamente a vulcaniti intermedie tipo andesiti e daciti (CRITELLI, 1991; CRITELLI & LE PERA, 1994).

Le paleocorrenti indicano una alimentazione trasversale, con provenienza dei sedimenti dal settore occidentale, e una deviazione delle correnti secondo l'asse di massimo sviluppo del bacino (LOJACONO, 1975; BOIANO, 1993; 1994).

L'età di questa successione è Langhiano-Tortoniano secondo COCCO et al. (1972) e Tortoniano superiore - Messiniano inferiore secondo PATACCA et al. (1990).

5.2.2 Il Flysch di Castelvete

Tale formazione affiora nei settori settentrionali del confine campano - lucano. E' costituita da una alternanza di arenarie, argille e conglomerati a struttura massiccia. I meccanismi di deposizione sono da riferire a flussi gravitativi di sedimenti. Caratteristica peculiare della formazione è la presenza, a più altezze stratigrafiche, di olistostromi e di olistoliti calcarei, di dimensioni anche superiori alle migliaia di metri cubi, provenienti dal margine della Piattaforma Sud-appenninica (PESCATORE & SENATORE, 1986).

I depositi riferiti al Flysch di Castelvete poggiano in discordanza angolare sia sulle successioni della piattaforma carbonatica che su quelle del Bacino di Lagonegro. Lo spessore è compreso tra alcune centinaia ed il migliaio di metri; l'età di questa formazione è Langhiano - Tortoniano (PESCATORE et al., 1970; COCCO et al., 1974).

PIETRAPERIOSA

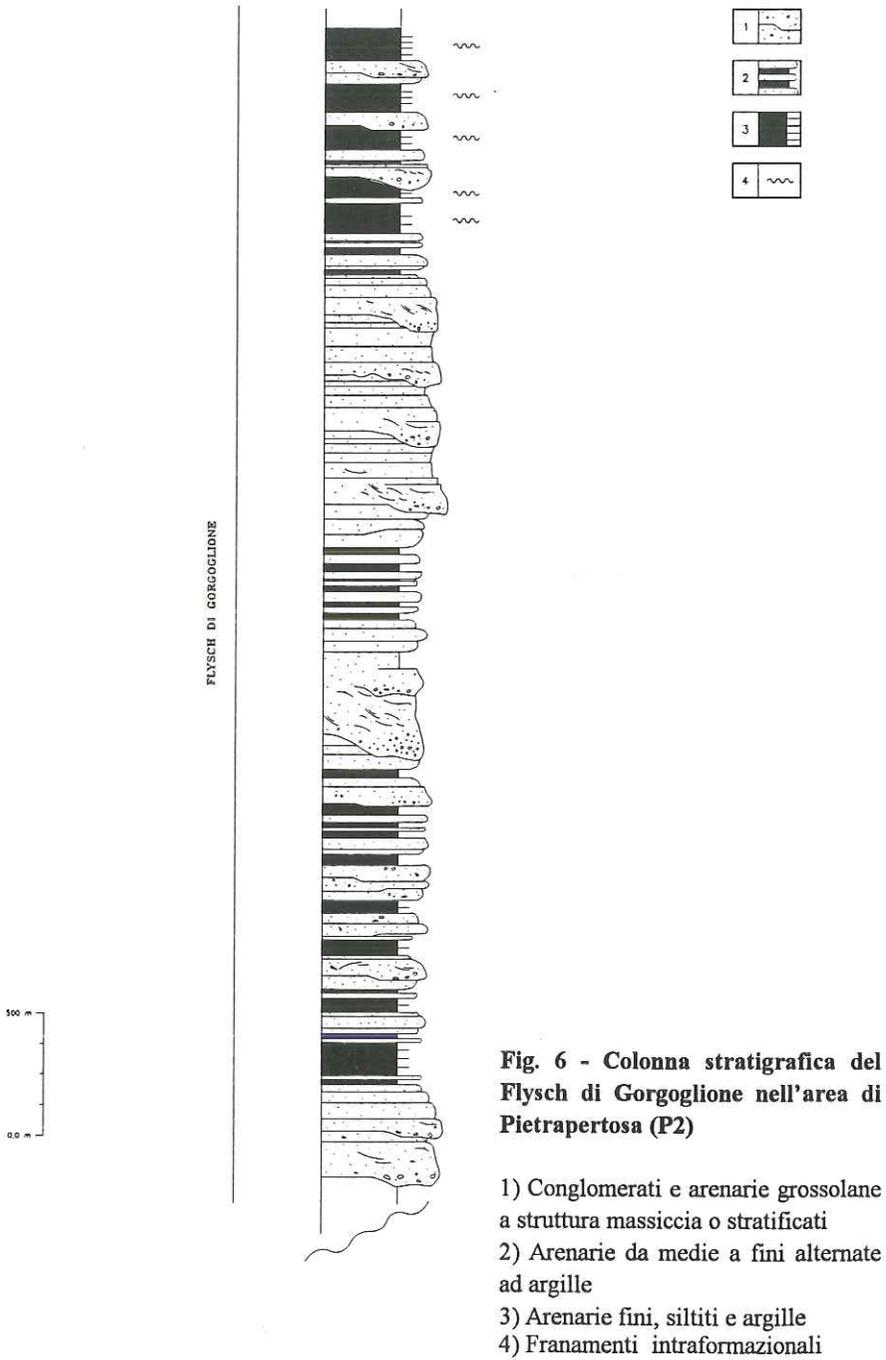


Fig. 6 - Colonna stratigrafica del Flysch di Gorgoglione nell'area di Pietrapertosa (P2)

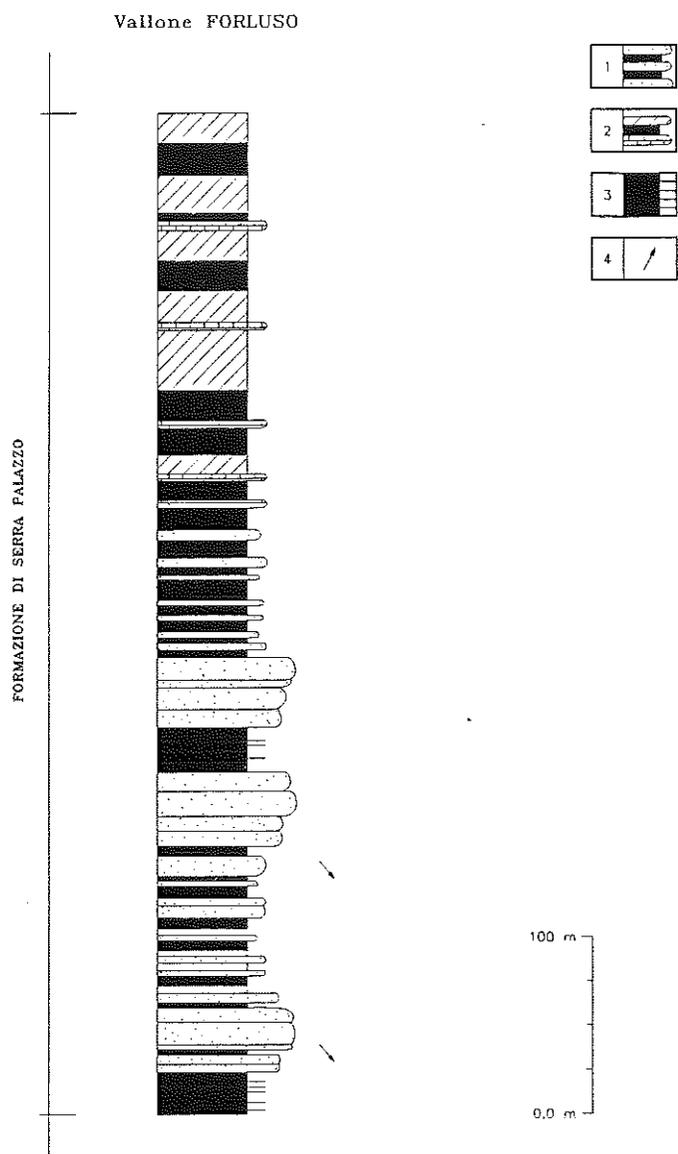


Fig. 7 - Colonna stratigrafica della Formazione di Serra Palazzo

- 1) Arenarie da medie a fini e argille
- 2) Calcareniti, marne e argille
- 3) Arenarie fini, siltiti e argille
- 4) Direzione delle paleocorrenti

U. DAUNA

Sezione di Monte Sidone

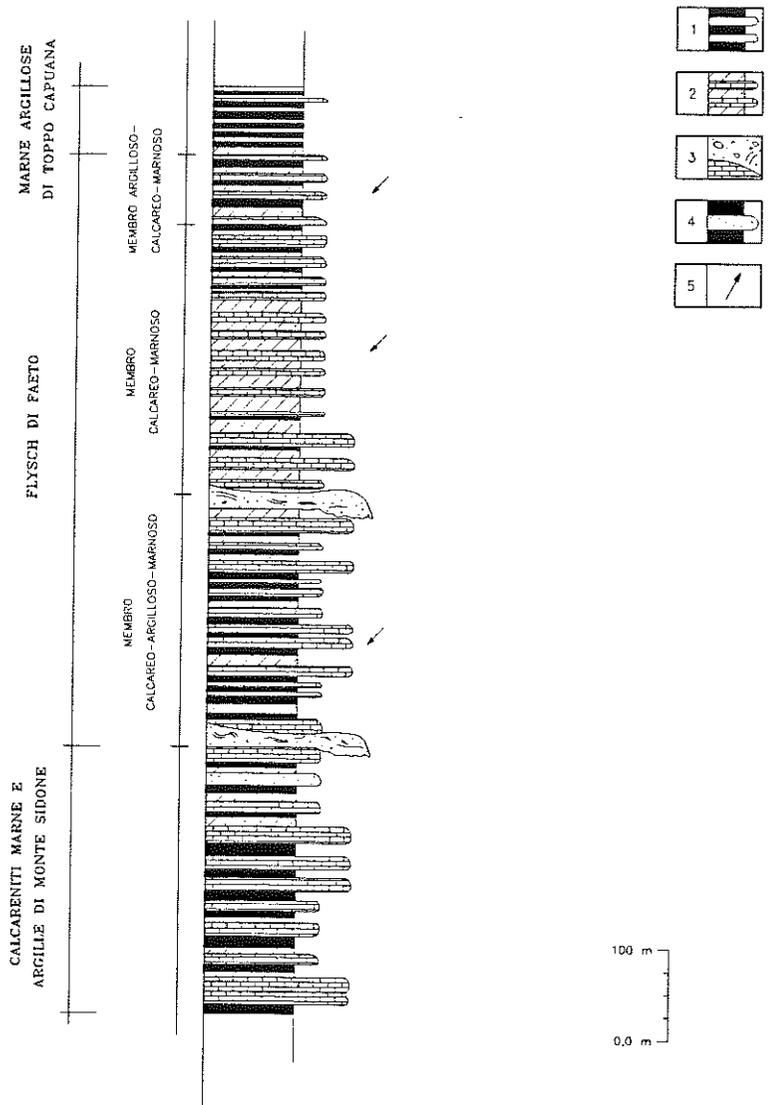


Fig 8 - Colonna stratigrafica dell'Unità Dauna

- 1) Marne e argille
- 2) Calcareniti e marne
- 3) Calcareniti e calciruditi massive
- 4) Arenarie quarzarenitiche e argille
- 5) Direzione delle paleocorrenti

5.2.3 La Formazione di Serra Palazzo (Fig. 7)

La Formazione di Serra Palazzo poggia in continuità sul Flysch Numidico dell'Unità lagonegrese di Campomaggiore - Unità Dauna e ha uno spessore totale di circa 1000 m (CASNEDI, 1964; CROSTELLA & STROCCHI, 1969; PALMENTOLA, 1970). La base della successione affiorante, è costituita da un'alternanza di marne arenacee ad orbuline e calcareniti torbiditiche. Verso l'alto aumenta via via la frazione arenacea con alcuni livelli caotici dovuti a franamenti intraformazionali. La parte alta della formazione è costituita da un'alternanza di marne, arenarie a grana fine e calcareniti, che passano alle argille ed argille marnose della Formazione delle Marne argillose del Toppo Capuana (CROSTELLA & VEZZANI, 1964).

Le direzioni delle paleocorrenti mostrano una provenienza del materiale silico-clastico dai quadranti occidentali e nord-occidentali mentre quella del materiale calcareo-clastico dai quadranti orientali (LOJACONO & SBARRA, 1991).

L'età di questa formazione è Langhiano superiore - Tortonian inferiore (PALMENTOLA, 1970).

5.3 L'AVAMPAESE

Le successioni mioceniche di avampaese comprendono sia i depositi trasgressivi concordanti sulla porzione settentrionale della Piattaforma Sud-appenninica non ancora deformata, che le successioni calcareo clastiche della Flysch di Faeto (CROSTELLA & VEZZANI, 1964), in continuità di sedimentazione sulla sottostante Unità lagonegrese di Campomaggiore - Unità Dauna.

5.3.1. Successioni della Piattaforma Sud-appenninica

Nelle aree nord-orientali della catena, analogamente a quanto visto per l'intervallo del Miocene inferiore nelle aree meridionali, al di sopra delle successioni mesozoiche e paleogeniche di piattaforma carbonatica, si ritrova una successione tipica di annegamento con età Miocene medio-superiore. Questa successione presenta alla base calcari di ambiente neritico (Formazione di Cusano) passanti rapidamente a depositi silicoclastici torbiditici (Formazione di Longano e Formazione di Pietraraja). Il diacronismo di tali sequenze indica come l'annegamento della piattaforma avveniva progressivamente verso N e NE (CARANNANTE et al., 1987).

Questo settore della piattaforma, che costituiva il margine settentrionale dell'avanzossa, produceva gli olistoliti calcarei che si intercalavano alla

sedimentazione prevalentemente silico - clastica del Flysch di Castelvete e Frosolone.

5.3.2 Flysch di Faeto (Fig. 8) e Marne argillose di Toppo Capuana

Il Flysch di Faeto è costituito da una successione di torbiditi calcareo-clastiche con spessore di oltre 600 m (CROSTELLA & VEZZANI, 1964; SENATORE, 1988; SANTO & SENATORE, 1988; RUSSO & SENATORE, 1989; PINTO, 1993) che affiora nei Monti della Daunia tra Molise, Campania e Puglia, lungo una fascia ad andamento NW-SE al margine della catena appenninica; esso poggia in concordanza sulle Calcareniti, argille e marne di Monte Sidone (SENATORE, 1988; Unità lagonegrese di Campomaggiore - Unità Dauna).

La base di questa formazione è data da un livello calcareo-clastico molto grossolano a struttura caotica, spesso oltre i 10 m, cui seguono per circa 250 metri calcareniti torbiditiche intercalate ad argille e marne grigie. La parte alta, per circa 300 metri, è costituita da una alternanza di calcareniti torbiditiche e marne calcaree con *Orbulina universa*, di regola intensamente bioturbate soprattutto per la presenza di *Zoophycos* (TAVERNIER, 1988);

La successione è chiusa da un livello argilloso-marnoso-calcareo, spesso circa 80 m, costituito in prevalenza da argille verdi e marne grigio-azzurro cui si intercalano sporadicamente strati lenticolari di calcareniti torbiditiche.

Le direzioni delle paleocorrenti, in tutta la successione, indicano una provenienza del materiale calcareo-clastico dal quadrante nord-orientale.

L'età è del Langhiano inferiore - Tortoniano inferiore secondo RUSSO & SENATORE (1989) mentre viene attribuita al Tortoniano da PATACCA & SCANDONE (1989)

Questa formazione passa verso l'alto, in concordanza, alla Formazione delle Marne argillose del Toppo Capuana (CROSTELLA & VEZZANI, 1964), costituita da un'alternanza di marne argillose, argille e arenarie del Tortoniano medio superiore (RUSSO & SENATORE, 1989)

6. DISCUSSIONE

L'evoluzione paleogeografica di questo settore della catena appenninica nel Miocene è stata ricostruita sulla base di rilievi geologici eseguiti in Campania ed in Lucania. Tali studi hanno consentito una migliore definizione, anche attraverso l'analisi delle facies, delle caratteristiche sedimentarie delle successioni e la loro distribuzione nello spazio e nel tempo; tali successioni sono organizzate in unità tettoniche con definiti rapporti geometrici (Fig. 1).

Le unità tettoniche più esterne (Unità lagonegrese di Campomaggiore - Unità **Dau**na) sono caratterizzate da facies di bacino o di margine di piattaforma carbonatica affiorano con buona continuità lungo tutto il margine della catena. L'assetto strutturale esogeo è dato da strutture plicative o pieghe-faglie con andamento da appenninico a meridiano (PINTO, 1993); la vergenza è adriatica con associati fenomeni di retroscorrimento. Queste unità poggiano tettonicamente sui terreni plio-pleistocenici dell'avanfossa bradanica.

Le unità tettoniche interne sono caratterizzate da successioni con facies marcatamente differenziate sia procedendo dalle aree tirreniche a quelle adriatiche, sia dai quadranti settentrionali a quelli meridionali. Facies riferibili ad un margine di piattaforma carbonatica sono prevalentemente diffuse nelle aree più occidentali (Unità lagonegrese di Monte Arioso - Unità di Monte Coppe) mentre in quelle più orientali sono presenti facies di bacino (Unità lagonegrese di **Gro**ppa d'Anzi - Unità del Fortore). Il confronto tra le successioni dei settori settentrionali e quelli meridionali, indica un progressivo approfondimento del bacino verso sud e un ringiovanimento delle facies verso nord. L'assetto strutturale di queste aree è caratterizzato da strutture plicative e da sovrascorrimenti a vergenza adriatica; è presente anche una tettonica distensiva di età plio-quadernaria. Queste unità sono sovrapposte tettonicamente a quelle più esterne e sono sottoposte alle unità carbonatiche della Piattaforma Sud-appenninica.

Le unità tettoniche affioranti nelle aree tirreniche presentano successioni di bacino prevalentemente silico-clastiche e calcareo-clastiche (Flysch del Cilento). Tali successioni poggiano in discordanza su terreni con ofioliti riferibili ad un dominio oceanico. L'assetto strutturale è caratterizzato da strutture di compressione riprese da una imponente tettonica distensiva, a partire almeno dal Messiniano. Queste unità, nei settori settentrionali, sono sovrapposte tettonicamente a quelle delle Piattaforma Sud-appenninica, in quelle meridionali poggiano in discordanza sulle unità lagonegresi.

La ricostruzione dell'evoluzione paleogeografica dell'avanfossa appenninica, durante il Miocene può essere suddivisa in due principali fasi a partire da una paleogeografia oligocenica, ereditata da quella cretacico-paleogenica ricostruita secondo il modello di PESCATORE et al. (1988). Durante tali fasi si individua dapprima il Bacino del Cilento e quindi il Bacino Irpino.

- Miocene inferiore-medio (Fig. 9)

Durante questa fase l'avanfossa è rappresentata dal Bacino del Cilento che risulta confinato tra il margine orogenetico ad ovest e la Piattaforma Sud-appenninica ad est. I sedimenti del bacino di avanfossa (formazioni di Pollica e San Mauro) poggiano con una marcata discordanza su successioni bacinali meso-cenozoiche già deformate riferite alle Unità Liguridi.

Nelle aree settentrionali la piattaforma è emersa e produce detrito e sedimenti carbonatici che si accumulano nel bacino di avanfossa, mentre, nelle aree più meridionali, la piattaforma sprofonda rapidamente, così come testimoniano le già descritte successioni di annegamento, costituendo in parte il substrato dell'avanfossa.

La Formazione di Pollica rappresenta l'inizio della sedimentazione silico-clastica nel bacino di avanfossa; la provenienza degli apporti è prevalente da ovest. L'arrivo nel bacino di grandi volumi di materiale calcareo (Formazione di San Mauro e Formazione di Albidona) dapprima assenti nei sedimenti sottostanti, indica un evento tettonico che ha colpito la Piattaforma carbonatica Sud-appenninica.

La piattaforma carbonatica costituiva una barriera alla diffusione dei sedimenti silico-clastici verso est solo nelle aree settentrionali. Verso sud il dominio della Piattaforma carbonatica era già incorporato nelle falde, il cui fronte aveva già coinvolto il dominio occidentale del bacino di Lagonegro.

Un alto strutturale, rappresentato molto probabilmente dal fronte delle coltri, separava il Bacino del Cilento (Formazione di Albidona) dalla parte del bacino di Lagonegro non ancora deformato.

Pertanto il fronte cinematico delle coltri è in questo periodo obliquo rispetto all'andamento del margine della piattaforma, ciò determina una marcata asimmetria nell'avanfossa.

Durante questo periodo la sedimentazione nel Bacino di Lagonegro, che occupava prevalentemente le aree esterne all'avanfossa, risulta ben differenziata sia longitudinalmente al bacino che in senso trasversale. I sedimenti miocenici, nel settore nord-occidentale sono rappresentati prevalentemente da depositi calcareo-clastici con megabrecce e da arenarie vulcanoclastiche e quarzose (Formazione di Paola Doce). I sedimenti della zona assiale e meridionale sono invece rappresentati da depositi silico-clastici e vulcanoclastici (Tufiti di Tusa) che testimoniano la presenza di un arco vulcanico ed una attiva subduzione; tali depositi nelle aree più interne poggiano in discordanza sul substrato lagonegrese già in parte deformato, mentre nelle aree più esterne seguono in continuità i sedimenti lagonegresi oligocenici (Argille Varicolori). Nelle aree settentrionali ed in quelle più esterne la sedimentazione è ancora caratterizzata dai depositi emipelagici e calcareo-clastici del Flysch Rosso.

Nel Langhiano l'avanfossa migra verso settori nordorientali. La sedimentazione nel Bacino del Cilento diventa prevalentemente silico-clastica e grossolana, mentre scompare quasi completamente la sedimentazione calcareo-clastica, in conseguenza allo sprofondamento del settore di piattaforma prospiciente l'avanfossa. Nel Bacino di Lagonegro, forse in relazione alla sommersione del margine orogenetico, gradualmente gli apporti detritici e vulcanoclastici di provenienza interna vengono sostituiti da apporti quarzoarenitici di provenienza meridionale (Flysch Numidico). Tali depositi

seguono in continuità le successioni lagonegresi nelle aree assiali ed esterne del bacino, mentre, nelle aree occidentali ricoprono in discordanza le successioni della Piattaforma Sud-appenninica già sprofondata. Gli spessori si riducono progressivamente da sud verso nord e da est verso ovest.

-Miocene medio-superiore (Fig. 9)

In seguito alla fase diastrofica avvenuta nel Langhiano, scompare il Bacino del Cilento e si individua un nuovo bacino (Bacino Irpino), impostato in parte sulle unità della Piattaforma Sud-appenninica e lagonegresi già deformate, ed in parte sui settori centrali ed orientali del Bacino di Lagonegro non ancora deformati (PESCATORE, 1978).

Nelle zone più interne si individuano bacini di intracatena (arco disattivato) impostati in settori della catena già in distensione. A tale tipo di bacino può essere riferita la Formazione di Monte Sacro deposta su unità deformate rappresentate dai sedimenti accumulati nell'avanfossa del Cilento.

Sulle coltri sono ubicate successioni tipo Flysch di Gorgoglione che rappresentano i prodotti della sedimentazione in zone attive del margine interno

Fig.9 - Schemi paleogeografici delle avolfosse sud-appenniniche

Bacino del Cilento:

SM - Formazione di S. Mauro
ALB - Formazione di Albidona

Piattaforma sud appenninica -PSA -

Bacino di Lagonegro:

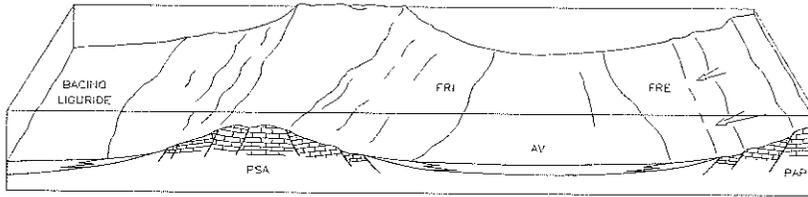
FRI - Flysch Rosso interno
FRE - Flysch Rosso esterno
AV - Argille Varicolori
PD - Formazione di Paola Doce
TT - Tufiti di Tusa
N - Flysch Numidico

Bacino Irpino:

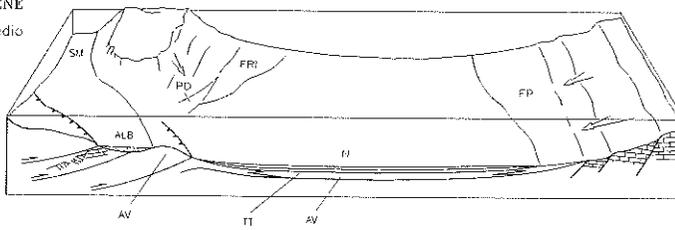
FC - Formazione di Castelvetere
FG - Formazione di Gorgoglione
SP - Formazione di Serra Palazzo
FF - Formazione di Faeto

Piattaforma apula -PAP-

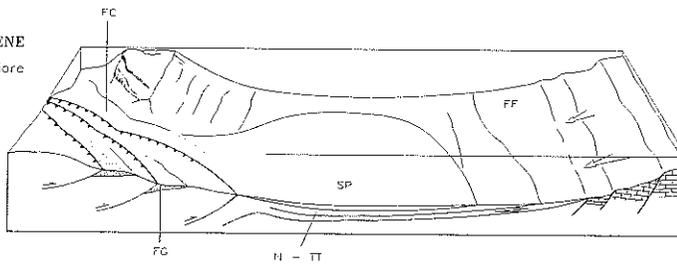
OLIGOCENE



MIOCENE
inferiore - medio



MIOCENE
medio - superiore



dell'avanfossa in bacini satelliti o piggyback. Sul fronte delle coltri, l'avanfossa è colmata dai sedimenti silico-clastici e calcareo-clastici della Formazione di Serra Palazzo, mentre nelle aree nord-occidentali la flessurazione della Piattaforma Sud-appenninica produceva gli olistoliti calcarei intercalati ai depositi del Flysch di Castelvetero.

Nelle zone orientali, la sedimentazione era prevalentemente calcareo-clastica (Flysch di Faeto) con apporti provenienti quasi esclusivamente dal margine interno dell'avampaese apulo.

Il Bacino irpino scompare in seguito ad una fase tettonica diacrona di età tortoniana nell'Appennino lucano e forse messiniana nell'Appennino dauno.

In questo lavoro sono stati individuati due differenti stadi nell'evoluzione dell'avanfossa appenninica rappresentati dal Bacino del Cilento nel Aquitaniano-Langhiano e dal Bacino Irpino nel Langhiano-Tortoniano.

La distribuzione dei sedimenti in questi bacini è analoga e si realizza con sedimenti silico-clastici nel settore occidentale provenienti dalla catena in via di formazione e da sedimenti calcareo-clastici provenienti invece da una piattaforma carbonatica che ne costituisce il margine esterno.

Le successioni in cui sono presenti sedimenti misti indicano la zona assiale del bacino di avanfossa (Formazione di San Mauro e Formazione di Serra Palazzo). Tutte queste successioni di avanfossa hanno una tendenza regressiva e debuttano con depositi di bacino di regola torbiditici che verso l'alto tendono a diventare meno profondi.

La distribuzione delle facies dei depositi di avanfossa e i loro rapporti geometrici col substrato indicano:

1- bacini di avanfossa a fisiografia complessa, non inquadrabili in schemi che prevedano una distribuzione cilindrica dei domini sedimentari;

2- graduale coinvolgimento delle zone isopiche meso-cenozoiche nella tettonogenesi cenozoica, le quali assumono nello stesso tempo ruoli differenti nel sistema catena-avampaese.

Questi dati sono coerenti con bacini di avanfossa impostati su di un fronte cinematico delle coltri con direttrici oblique rispetto alle linee strutturali che si sono individuate durante la tettonica tensile mesozoica.

L'evoluzione dell'avanfossa appenninica è in definitiva controllata dalla storia geologica mesozoica di questo settore del margine adriatico. Durante le fasi tettoniche mesozoiche, infatti, si sono individuati diversi domini paleogeografici impostati su aree a differente spessore crostale: piattaforme carbonatiche su crosta continentale a spessore normale, e bacini su crosta continentale a spessore ridotto o semioceanica. Queste variazioni di spessore, inoltre, si riscontrano non solo in senso normale ma anche in senso longitudinale al margine continentale, così come indicano le variazioni di facies da nord a sud del Bacino di Lagonegro.

Questa disomogenea distribuzione degli spessori crostali ha influenzato, durante le fasi di compressione, sia l'orientamento del fronte delle coltri, che la

velocità e le modalità della deformazione, con l'individuazione di bacini complessi come quelli descritti: il Bacino del Cilento e il Bacino Irpino.

Un avampaese su crosta assottigliata facilita i processi di subduzione e la formazione di un prisma di accrezione; mentre un avampaese impostato su crosta continentale normale, genera, durante la collisione continentale, importanti thrust e sovrascorrimenti e significative variazioni delle condizioni paleogeografiche preesistenti.

I bacini di avanfossa appenninici si sono evoluti prevalentemente su domini a crosta assottigliata con processi di subduzione che hanno dato luogo a prismi di accrezione; la scomparsa di questi bacini è connessa invece alla collisione del fronte della catena con aree a crosta con spessori normali (PESCATORE, 1978).

7. RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

AMORE F. O., BONARDI G., CIAMPO G., DE CAPOA P., PERRONE V. & SGROSSO I. (1988) - Relazioni tra "Flysch interni" e domini appenninici. Reinterpretazione delle formazioni di Pollica, San Mauro e Albidona e il problema dell'evoluzione infra-miocenica delle zone esterne appenniniche. *Mem. Soc. Geol. It.*, **41**, 285-297.

AMODIO MORELLI L., BONARDI G., COLONNA V., DIETRICH D., GIUNTA G., IPPOLITO F., LIGUORI V., LORENZONI S., PAGLIONICO A., PERRONE V., PICCARETA G., RUSSO M., SCANDONE P., ZANETTIN LORENZONI E. & ZUPPETTA A. (1976) - L'arco calabro-peloritano nell'orogene appenninico magrebide. *Mem. Soc. Geol. It.*, **17**, 1-60.

ANELLI M. (1939) - Sulla presenza di falde di ricoprimento in Italia meridionale. *Atti Soc. Natural. Matem. Modena*, **76**, 1-13.

BOENZI F. & CIARANFI N. (1970) - Stratigrafia di dettaglio del Flysch di Gorgoglione (Lucania). *Mem. Soc. Geol. It.*, **9**, 68-80.

BOENZI F., CIARANFI N. & PIERI P. (1968) - Osservazioni geologiche nei dintorni di Accettura e Oliveto Lucano (Tav. 200 II NE, IV SE, IV NE). *Mem. Soc. Geol. It.*, **7**, 379-392.

BOIANO U. (1993) - Le facies torbiditiche grossolane del Flysch di Gorgoglione (Miocene, Appennino lucano): caratteri deposizionali ed ipotesi sulla formazione degli strati amalgamati. *Giorn. Geol.*, **55**, 179-187.

BOIANO U. (1994) - Anatomia di un bacino torbiditico: il Flysch di Gorgoglione (Miocene, Italia meridionale). *Stratigrafia fisica, analisi di facies, inquadramento stratigrafico-sequenziale*. Tesi di Dottorato, Università di Napoli, 208 pp.

BONARDI G., AMORE F. O., CIAMPO G., DE CAPUA P., MICONNET P. & PERRONE V. (1988) - Il complesso liguride auct.: stato delle conoscenze e problemi aperti sulla sua evoluzione pre-appenninica e i suoi rapporti con l'Arco Calabro. *Mem. Soc. Geol. It.*, **41**, 17-35.

BOSELLINI A., NERI C. & LUCIANI V. (1993) - Guida ai carbonati Cretaceo-Eocenici di scarpata e bacino del Gargano (Italia Meridionale). *Ann. Univ. Ferrara (N.S.), Sez. Sc. Terra*, **4**, suppl., pp. 77.

CARANNANTE G., PESCATORE T., SENATORE M.R. & SIMONE L. (1987) - L'annegamento delle aree di avampaese miocenico e la migrazione delle facies a briozoi e

litotamni (foramol) nell'Appennino Meridionale. Convegno della Società Geologica Italiana, Naxos-Pergusa, 22-25 aprile 1987.

CARANNANTE G., D'ARGENIO B., MINDSZENTY A., RUBERTI D. & SIMONE L. (1994) - Cretaceous - Miocene shallow water carbonate sequences. Regional unconformities and facies patterns. 15th IAS Regional Meeting Ischia '94, Pre-meeting Fieldtrip Guidebook, 27-60.

CARBONE S., LENTINI F., SONNINO M. & DE ROSA R. (1987) - Il Flysch numidico di Valssinni (Appennino Lucano). Boll. Soc. Geol. It., **106**, 331-345.

CARBONE S., CATALANO S., LENTINI F. & MONACO C. (1988) - Le unità stratigrafico strutturali dell'alta Val d'Agri (Appennino lucano) nel quadro dell'evoluzione del sistema catena-avanfossa. Mem. Soc. Geol. It., **41**, 331-341.

CASERO P., ROURE F., ENDIGNOUX L., MORETTI I., MULLER C., SAGE L. & VIALLY R. (1988) - Neogene geodynamic evolution of the Southern Apennines. Mem. Soc. Geol. It., **41**, 109-120.

CASNEDI R. (1964) - Rapporti tra il Flysch e il Pliocene nella zona del Fiume Basento - Stigliano (PZ). Atti Soc. It. Sc. Nat., Milano, **103**, 235-247.

CELLO G. & NUR A. (1988) - Emplacement of foreland thrust systems. Tectonics, **7**, (2), 261-271.

CELLO G., PALTRINIERI W. & TORTORICI L. (1987) - Caratterizzazione strutturale delle zone esterne dell'Appennino Molisano. Mem. Soc. Geol. It., **38**, 155-161.

CIARANFI N., PIERI P. & RICCHETTI G. (1988) - Note alla Carta geologica delle Murge e del Salento (Puglia centro meridionale). Mem. Soc. Geol. It., **41**, 449-460.

CIARAPICA G., CIRILLI S., MARTINI R., PANZANELLI FRATONI R., SALVINI-BONNARD G. & ZANNETTI L. (1990) - The Monte Facito Formation (Southern Apennines). Boll. Soc. Geol. It., **59**, 117.

CIESZKOWSKI M., MALATA E., OSZCZYPKO N., PESCATORE T., SENATORE M.R., SLACZKA A. & VALENTE A. (1992) Rapporti tra le successioni di Monte Sacro e Monte della Stella nel Flysch del Cilento (Appennino Meridionale). Rend. Acc. Sci. Fis. e mat., **59** (serie 4°), 33-56.

CIESZKOWSKI M., OSZCZYPKO N., PESCATORE T., SENATORE M.R., SLACZKA A. & VALENTE A. (1995) Megatorbiditi calcareo-marnose nelle successioni flyscioidi dell'Appennino Meridionale (Cilento, Italia) e dei Carpazi Settentrionali (Polonia). Boll. Soc. Geol. It., **114**, 67-88.

COCCO E. & PESCATORE T. (1975) - Facies pattern of Southern Apennines Flysch-troughs. In: C. Squyres (ed.), Geology of Italy, Petrol. Explo. Soc. of Lybia, 289-302.

COCCO E., DE MAGISTRIS M.A. & DE PIPPO T. (1978) - Sedimentologia del Flysch del Cilento: 1. Le arenarie di Serramezzana (Cilento, Appennino meridionale). Geol. Romana, **17**, 289-302.

COCCO E., DE PIPPO T. & VALENTE A. (1986) - Sedimentologia del Flysch del Cilento: 2. Le arenarie di Tempa Rossa (Cilento, Appennino meridionale). Geol. Romana, **25**, 25-32.

COCCO E., CRAVERO E., ORTOLANI F., PESCATORE T., RUSSO M., SGROSSO I. & TORRE M. (1972) - Les facies sedimentaries du Basin Irpinien (Italia Meridionale). Atti Acc. Pontaniana, Napoli, **21**, 1-13.

COCCO E., CRAVERO E., ORTOLANI F., PESCATORE T., RUSSO M., TORRE M. & COPPOLA L. (1974) Le unità irpine nell'area a Nord di Monte Marzano, Appennino meridionale, Mem. Soc. Geol. It., **13**, 607-654.

COLELLA A. & ZUFFA G. G. (1988) - Megastrati carbonatici e silicoclastici della Formazione di Albidona (Miocene, Appennino meridionale): implicazioni paleogeografiche. *Mem. Soc. Geol. It.*, **41**, 791-807.

CRESCENTI U. (1966) - Osservazioni sulla stratigrafia dell'Appennino meridionale alla luce delle recenti ricerche paleontologiche. *Boll. Soc. Geol. It.*, **85**, 541-579.

CRISCI G. M., CRITELLI S. & DE ROSA R. (1988) - Vulcanismo sinsedimentario nella successione terrigena della Formazione di San Mauro (Miocene inferiore, Unità del Cilento), Appennino meridionale. *Miner. Petr. Acta*, **31**, 159-178.

CRITELLI S. (1987) - Petrologia delle areniti della Formazione di San Mauro (Eocene sup. - Oligocene sup., Bacino del Cilento), Appennino meridionale. *Mem. Soc. Geol. It.*, **38**, 601-619.

CRITELLI S. (1991) - Evoluzione delle mode detritiche delle successioni arenitiche terziarie dell'Appennino Meridionale. *Mem. Soc. Geol. It.*, **47**, 55-93.

CRITELLI S. (1993) - Sandstone detrital modes in the Paleogene Liguride Complex, accretionary wedge of Southern Apennines (Italy). *Journal of Sedimentary Petrology*, **63**, 464-476.

CRITELLI S. & LE PERA E. (1990a) - Litostratigrafia e composizione della Formazione di Pollica (Gruppo del Cilento, Appennino meridionale). *Boll. Soc. Geol. It.*, **109**, 511-536.

CRITELLI S. & LE PERA E. (1990b) - Composizione e provenienza delle areniti della Formazione del Torrente Bruca (Gruppo del Cilento) e di Monte Sacro (Cilento, Appennino meridionale). *Giorn. Geol.*, **52**, 121-133.

CRITELLI S. & LE PERA E. (1994) - Detrital modes and provenance of Miocene sandstones and modern sands of the Southern Apennines thrust-top basins (Italy). *Journal of Sedimentary Research*, **64**,

CRITELLI S. & LOJACONO F. (1988) - Provenienza e dispersione dei sedimenti del Flysch di Gorgoglione (Langhiano - Tortoniano, Appennino lucano): implicazioni sull'evoluzione delle mode detritiche arenacee nell'orogene sudappenninico. *Mem. Soc. Geol. It.*, **41**, 809-826.

CRITELLI S., DE ROSA R., SONNINO M. & ZUFFA G. G. (1990) - Significato dei depositi vulcanoclastici della Formazione delle Tufiti di Tusa (Miocene inferiore, Lucania meridionale). *Boll. Soc. Geol. It.*, **109**, 743-762.

CROSTELLA A. & VEZZANI L. (1964) - La geologia dell'Appennino Foggiano, *Boll. Soc. Geol. It.*, **83**, 121-142

CROSTELLA A. & STROCCHI M. (1969) - Geologia e geofisica della zona di Tricarico (Lucania). *Boll. Soc. Geol. It.*, **88**, 217-234.

D'ARGENIO B. (1966) - Le facies littorali mesozoiche dell'Appennino meridionale. *Boll. Soc. Natur. in Napoli*, **75**, 497-552.

D'ARGENIO B. (1974) - Le piattaforme carbonatiche periadriatiche. Una rassegna di problemi nel quadro geodinamico mesozoico dell'area mediterranea. *Mem. Soc. Geol. It.*, **13**, 137-160.

D'ARGENIO B., PESCATORE T. & SCANDONE P. (1973) - Schema geologico dell'Appennino meridionale (Campania e Lucania). *Atti del Conv. Moderne vedute sulla geologia dell'Appennino*. *Acc. Nazion. Lincei*, **182**, 49-72.

DAZZARO L., DI NOCERA S., PESCATORE T., RAPISARDI L., ROMEO M., RUSSO B., SENATORE M.R. & TORRE M. (1988) - Geologia del margine della catena appenninica tra il F. Fortore ed il T. Calaggio (Monti della Daunia - Appennino Meridionale). Mem. Soc. Geol. It., **41**, 411-422.

DE LORENZO G. (1904) - Geologia e geografia fisica dell'Italia meridionale, 241 p., Laterza, Bari.

DE PIPPO T., & VALENTE A. (1991) - Osservazioni sedimentologiche preliminari sui "Conglomerati di Monte Sacro" (Campania). Boll. Soc. Geol. It., **110**, 47-51.

DOGLIONI C. (1990) - The global tectonic pattern. J. Geodyn., **12**, 21-38.

DOGLIONI C. (1991a) - Una interpretazione della tettonica globale. Scienze, **270**, 32-42.

DOGLIONI C. (1991b) - A proposal of kinematic modelling for W-dipping subductions - possible applications to the Tyrrhenian Apennines system. Terra Nova, **3**, 423-434.

DONDI L. & PAPPETTI I. (1965) - Sul ritrovamento di una microfauna con *Miogypsina* e *Lepidocyclina* al fondo del pozzo Contursi I (m 3478) nel Cilento. Geol. Romana, **4**, 7-40.

GRYZBOWSKI J. (1921) - Contributo agli studi della struttura geologica dell'Italia meridionale. Boll. Soc. Geol. Ital., **40**, (1-2), 85-97.

HIEKE MERLIN O., LA VOLPE L., NAPPI G., PICARRETTA G., REDINI R. & SANTAGATA G. (1971) - Note illustrative della Carta Geologica d'Italia alla scala 1:100.000 - F. 186 e 187, Sant'Angelo dei Lombardi, Melfi. Nuova Tecnica Grafica, Roma, pp. 188.

IETTO A. (1965) - Su alcune particolari strutture connesse alla tettonica di sovrascorrimento dei Monti Picentini (Appennino meridionale). Boll. Soc. Natur. in Napoli, **74**, 65-85.

IETTO A., GIANNI A. & PAPPONE G. (1983) - Cilento Flysch nappes, Southern Apennines. Tectonic and paleogeographic interpretation. Terra Cognita, **3**, 248-249.

KNOTT S. (1967) - The Liguride Complex of Southern Italy: a Cretaceous to Paleogene Accretionary Wedge. Tectonophysics, **142**, 217-226.

LENTINI F. (1979) - Le Unità Sicilidi della Val d'Agri (Appennino lucano). Geologica Romana, **18**, 215-225.

LENTINI F., CARBONE S., CATALANO S., GRASSO M. & MONACO C. (1990) - Principali elementi strutturali del thrust belt Appenninico-Maghrebide in Sicilia centro-orientale. Mem. Soc. Geol. It., **45**, 495-502.

LIMANOWSKI M. (1913) - Die grosse Kalabrische Decke. Bull. Int. Acad. Sc. Cracovie, Cl. Sc. Math. Nat., s. A, (6A), 370-385.

LOJACONO F. (1975) - Osservazioni sulle direzioni delle paleocorrenti nel Flysch di Gorgoglione (Lucania). Boll. Soc. Geol. It., **93**, 1127-1155.

LOJACONO F. & SBARRA R. (1991) - Caratteri sedimentologici della Formazione di Serra Palazzo nei dintorni di Tricarico (Basilicata). Mem. Soc. Geol. It., **47**, 157-166.

MARSELLA E., PAPPONE G., D'ARGENIO B., CIPPITELLI G. & BALLY A. W. (1992) - L'origine interna dei terreni lagonegresi e l'assetto tettonico dell'Appennino meridionale. Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. della Soc. Naz. Lettere e Arti in Napoli, s.4, **59**, 73-101.

MASSE J. P. & BORGOMANO J. (1987) - Un modèle de la transition plateforme-bassin carbonaté contrôlé par des phénomènes tectoniques: le Cretacé du Gargano (Italia méridionale). C. R. Acad. Sci. Paris, **304**, 521-526.

MATTAVELLI L. & PAVAN G. (1965) - Studio petrografico delle facies carbonatiche del Gargano. *Rend. Soc. Min. It.*, **21**, 207-245.

MONACO C., TANSI C., TORTORICI L., DE FRANCESCO A. & MORTEM L. (1991) - Analisi geologico-strutturale dell'Unità del Frido nel Confine calabro-lucano. (Appennino meridionale). *Mem. Soc. Geol. It.*, **47**, 129-143.

MOSTARDINI F. & MERLINI S. (1986) - Appennino centro meridionale. Sezioni geologiche e proposta di modello strutturale, 73° Cong. Soc. Geol. It., Roma 30.9/4.10.86, 1-59.

OGNIBEN L. (1969) - Schema introduttivo alla geologia del confine calabro-lucano. *Mem. Soc. Geol. It.*, **8**, 453-763.

PALMENTOLA G. (1970) - Nuovi dati e considerazioni sulla Formazione di Serra Palazzo in Lucania. *Mem. Soc. Geol. It.*, **9**, 81-90.

PATACCA E. & SCANDONE P. (1987) - The time-space migration of the thrust belt-foredeep-system in the Apennines. *Convegno della Società Geologica Italiana- Naxos- Pergusa*, 22-25 aprile 1987.

PATACCA E. & SCANDONE P. (1989) - Post-Tortonian mountain building in the Apennines. The role of the passive sinking of a relict lithospheric slab. In: A. Boriani, M. Bonafede, G.B. Piccardo & G.B. Vai (Eds.), *The lithosphere in Italy. Advances in Earth Science Research. It. Nat. Comm. Int. Lith. Prog., Mid-term Conf., Rome, 5-6 May 1987, Atti Conv. Lincei*, **80**, 157-176.

PATACCA E., SARTORI R. & SCANDONE P. (1990) - Tyrrhenian basin and Apenninic arcs: kinematic relation since Late Tortonian times. *Mem. Soc. Geol. It.*, **45**, 425-451.

PATACCA E., SCANDONE P., BELLATALLA M., PERILLI N. & SANTINI V. (1992) - The numidian sand event in the Southern Apennines. *Mem. Soc. Geol. It.*, **43**, 297-337.

PAVAN G. & PIRINI C. (1966) - Stratigrafia del Foglio 157 "Monte S. Angelo". *Boll. Serv. Geol. It.*, **86**, 123-189.

PERRONE V. & SGROSSO I. (1981) - Il bacino pre-irpino; un nuovo dominio paleogeografico miocenico dell'Appennino meridionale. *Rend. Soc. Geol. It.*, **4**, 365 - 368.

PESCATORE T. (1966) - Strutture sedimentarie del Flysch del Cilento occidentale. *Geol. Romana*, **5**, 99-116.

PESCATORE T. (1978) - Evoluzione tettonica del Bacino Irpino (Italia Meridionale) durante il Miocene. *Boll. Soc. Geol. It.*, **97**, 783-805.

PESCATORE T., (1988) - La sedimentazione miocenica nell'Appennino Campano-Lucano. *Mem. Soc. Geol. It.*, **41**, 37-46.

PESCATORE T. (1994) - La sedimentazione miocenica nell'Appennino lucano. In: G. Bonardi, B. De Vivo, P. Gasparini & A. Vallario (ed.), *Cinquanta anni di attività didattica e scientifica del prof. Felice Ippolito*, Liguori Napoli, 371-379.

PESCATORE T. & ORTOLANI F. (1973) - Schema tettonico dell'Appennino campano-lucano. *Boll. Soc. Geol. It.*, **92**, 453 - 472.

PESCATORE T. & TRAMUTOLI M. (1980) - I rapporti tra i depositi del bacino irpino nella media valle del Basento (Lucania). *Ren. Acc. Sc. Fis. Matem. Soc. Naz. Sci. Lettere ed Arti, Napoli*, **47**, (4), 19-41.

PESCATORE T. & SENATORE M.R. (1986) - A comparison between a present-day (Taranto Gulf) and a Miocene (Irpian Basin) foredeep of the southern Apennines (Italy). *Spec. Publ. Int. Ass. Sediment.*, **8**, 169-182.

PESCATORE T., SGROSSO I. & TORRE M. (1970) - Lineamenti di tettonica e sedimentazione nel Miocene dell'Appennino campano-lucano. Mem. Soc. Nat. in Napoli, suppl. Boll., **78**, 337-406.

PESCATORE T., SALVATI G. & TRAMUTOLI M. (1980) Regressive depositional cycles in the Gorgolione Flysch. Irpinids (Southern Italy), Geol. Romana, **19**, 51-61.

PESCATORE T., RENDA P. & TRAMUTOLI M. (1988) - Rapporti tra le Unità Lagonegresi e le Unità Sicilidi nella media valle del Basento. Mem. Soc. Geol. It., **41**, 353-361.

PESCATORE T., RENDA P. & TRAMUTOLI M. (1992) - Tufiti di Tusa e Flysch Numidico nella Lucania centrale (Appennino meridionale). Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. della Soc. Naz. Lettere e Arti in Napoli, s.4, **59**, 57-72.

PINTO F. (1993) - Assetto strutturale del fronte appenninico nei Monti della Daunia (Appennino meridionale). Tesi di Dottorato, Università di Napoli e Palermo, pp. 99.

QUITZOW H. W. (1935) - Der Deckenbau des Kalabrischen Massivs und seiner Randgebiete. Abh. Ges. Wiss. Göttingen, Mat. Phys. Kl., s. 3, (13), 63-179.

RICCHETTI G., CIARANFINI, LUPERTO SINNI E., MONGELLI F. & PIERI P. (1988) - Geodinamica ed evoluzione sedimentaria e tettonica dell'avampaese apulo. Mem. Soc. Geol. It., **41**, 57-82.

RUSSO B. & SENATORE M.R. (1989) - Ricerche sull'Unità Dauna: biostratigrafia e sedimentologia della successione di Monte Sidone nell'Appennino Dauno (Appennino meridionale). Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti, **67**, 79-97.

RUSSO M., ZUPPETTA A. & GUIDA A. (1995) - Alcune precisazioni stratigrafiche sul Flysch del Cilento (Appennino meridionale). Boll. Soc. Geol. It., **114**, 353-359.

SANTO A. & SENATORE M.R. (1988) - La successione stratigrafica dell'Unità Dauna a Monte Sidone (Castelluccio Valmaggiore - Foggia). Mem. Soc. Geol. It., **41**, 431-438.

SCANDONE P. (1967) - Studi di geologia lucana: la serie calcareo-silico-marnosa. Boll. Soc. Natural. in Napoli, **76**, 1-175.

SCANDONE P. (1982) - Structure and evolution of the Calabrian arc. Earth Evol. Scien., **3**, 172-180.

SCANDONE P. & SGROSSO I. (1974) - La successione dell'alta Vallimala nella finestra tettonica di Campagna (Monti Picentini). Boll. Soc. Geol. It., **93**, 1043-1047.

SELLI R. (1957) - Sulla trasgressione del Miocene nell'Italia meridionale. Giorn. Geologia, s. 2, **26**, (1954-55), 1-54.

SELLI R. (1962) - Il Paleogene nel quadro della geologia dell'Italia meridionale. Mem. Soc. Geol. It., **3**, 737-790.

SENATORE M.R. (1988) - Comparazione tra i depositi plio-pleistocenici del Bacino di Gallipoli (Golfo di Taranto) e la successione miocenica del Flysch di Faeto (Unità Irpine, Monti della Daunia): Confronto tra l'avanzosa attuale e quella miocenica dell'Appennino meridionale (Italia). Tesi di Dottorato, Università di Napoli, 317 pp.

SGROSSO I. (1986) - Criteri ed elementi per una ricostruzione paleogeografica delle zone esterne dell'Appennino meridionale. Mem. Soc. Geol. It., **35**, 203-219.

SGROSSO I. (1988) - Nuovi elementi per un più articolato modello paleogeografico nell'Appennino centro-meridionale. Mem. Soc. Geol. It., **41**, 225-242.

TAVERNIER A. (1988) - L'icnofacies a Zoophycos del Flysch di Faeto (Appennino Dauno). Considerazioni paleoambientali e paleoecologiche. Mem. Soc. Geol. It., **41**, 605-608.

TRAMUTOLI M. (1996) - Le successioni iagonegresi cretacico-mioceniche nell'Appennino Lucano (Italia meridionale). In stampa.

TURCO E. (1976) - La finestra tettonica di Campagna (M. Picentini - Salerno). Boll. Soc. Natur. in Napoli, **85**, 639-665.

VALENTE A. (1991) - Caratteri sedimentologici di una successione torbiditica nel Cilento (Appennino meridionale). Mem. Soc. Geol. It., **47**, 191-196.

VALENTE A. (1993) - Studi geologici e sedimentologici sulla successione miocenica di Monte Sacro (Flysch del Cilento). Tesi di Dottorato, Univ. di Napoli, 170 pp..

VEZZANI L. (1975) - Lithostratigraphic complexes and evidence for tectonic phases in the Molise-Puglia-Lucania Appennines. In: OGNIBEN L., PARROTTO M. & PRATURLON A. (eds), Structural model of Italy, C.N.R., Quaderni de "La Ricerca Scientifica", **90**, 329-363.

ZUPPETTA A., RUSSO M. & TURCO E. (1984) - Alcune osservazioni sulle Tufiti di Tusa nell'area compresa tra Valsinni e Rocca Imperiale (Confine calabro-lucano). Boll. Soc. Geol. It., **103**, 623-627.

ZUPPETTA A., RUSSO M., TURCO E. & GALLO L. (1984) - Età e significato della Formazione di Albidona in Appennino meridionale. Boll. Soc. Geol. It., **103**, 159-170.

¹Lavoro eseguito con fondi Murst 60%. Responsabile : Tullio S. Pescatore

Gli autori hanno curato i seguenti settori dell'Appennino campano-lucano:

Pescatore T. - Appennino campano-lucano; Pinto F. - Area Sannio-Daunia, settore settentrionale; Renda P. - Area lucana, settore meridionale; Senatore M.R. - Area Sannio-Daunia, settore meridionale; Tramutoli M. - Area lucana, settore settentrionale; Valente A. - Area del Cilento.

Porosità e Carbonatazione di Provini di Malta Confezionati con Cementi Portland e di Miscela

Nota di Riccardo Sersale¹ e Giuseppe Frigione^{2*}

Presentata dal Socio Ordinario Riccardo Sersale
(Adunanza del 1 giugno 1996)

Key words: mortar, concrete, carbonation.

Abstract - Authors emphasize that porosity plays a determinant rôle in adjusting carbonation depth of mortars and concretes, without denying the action of calcium hydroxide, formed during hydration process, as a possible check for CO₂ penetration.

Riassunto - Gli Autori mettono in evidenza il ruolo determinante della porosità nella regolazione della profondità di carbonatazione di malte e calcestruzzi, senza per questo escludere una possibile azione frenante della penetrazione di CO₂ da parte della calce d'idrolisi.

1 - INTRODUZIONE

Il livello di sostituzione del cemento Portland con pozzolana o scoria d'altoforno ha una significativa ricaduta sulla porosità della pasta di cemento indurita e, di conseguenza, sulla distribuzione dei raggi dei pori, sulla profondità di carbonatazione e sulla penetrazione degli ioni cloro e solfato.

È noto che l'azione delle sostanze aggressive può svolgersi secondo differenti meccanismi, comandati tutti dalla struttura porosa e dalle caratteristiche di diffusività degli agenti chimici.

Il processo di carbonatazione è uno dei più studiati fra quelli afferenti al degrado del calcestruzzo di cemento, in considerazione del fatto che

¹ Dipartimento di Ingegneria dei Materiali e della Produzione, 80125 Naples (Italy).

² Dipartimento di Ingegneria Chimica e dei Materiali, 87030 Rende, Cosenza (Italy).

* Author to whom correspondence should be addressed.

L'anidride carbonica dell'aria costituisce uno degli agenti più insidiosi per la durabilità delle strutture aeree. Tale durabilità, come è noto, dipende dall'attitudine del calcestruzzo a resistere alla penetrazione di sostanze aggressive presenti nell'ambiente circostante, con conseguente salvaguardia dei ferri di armatura.

Con riferimento all'anidride carbonica è verosimile immaginare che essa diffonda nei pori capillari del calcestruzzo, si combini con l'acqua e formi acido carbonico che, reagendo con gli idrossidi alcalini, generi carbonato. Poiché la concentrazione dell'idrossido di calcio è normalmente più alta di quella di altri idrossidi alcalini, nel calcestruzzo ordinario predominerà la reazione fra CO_2 e $\text{Ca}(\text{OH})_2$. La velocità di carbonatazione sarà verosimilmente controllata dalla riserva di idrossido di calcio del manufatto.

Con riferimento alla porosità, va osservato che mentre le molecole non polari di gas sono frenate nel loro ingresso nella pasta di cemento indurito solo dalla dimensione, rispetto al diametro dei canalicoli del gelo, le molecole di elettroliti sono limitate nella loro diffusione all'interno della pasta da interazioni tra la loro carica e le cariche elettrostatiche delle pareti dei pori o dal doppio strato elettrico all'interfaccia tra pareti dei pori e soluzione nei pori, piuttosto che da pure restrizioni geometriche^{1,2}. I pori del gel partecipano quindi in maniera determinante alla permeabilità ai gas e al vapor d'acqua, purché non siano pieni d'acqua, poiché questa si opporrebbe al loro passaggio. La diffusione dei gas sarà pertanto massima in assenza d'acqua all'interno dei pori e, al contrario, minima in caso di saturazione. In assenza d'acqua le reazioni gas-solido non possono decorrere, esisterà pertanto un grado intermedio di umidità sotto cui il calcestruzzo diverrà più vulnerabile da parte dei gas e quindi più soggetto a degrado³. Secondo Houst e Wittmann⁴ il limite superiore si situa al disotto di un valore minore del 90 per cento.

Mediante prove accelerate in atmosfera al 10 per cento di CO_2 ed a differenti livelli di umidità relativa, è stato osservato che la velocità di carbonatazione è massima per valori di umidità relativa dell'ordine del 50 per cento⁵. È stato notato che le diffusività di CO_2 ed O_2 non dipendono dalla concentrazione degli effluenti, bensì dalla porosità, risultandone approssimativamente una funzione esponenziale⁴.

In considerazione della complessità della tematica, siamo ritornati su di un argomento al quale abbiamo già prestato attenzione: il ruolo della porosità e della distribuzione delle dimensioni dei pori sulla profondità di carbonatazione dei cementi d'aggiunta (d'altoforno e pozzolanico).

In una precedente ricerca⁶ avevamo messo in evidenza che il contenuto di SO_3 significativamente influenza i valori di porosità totale delle malte di cemento d'altoforno ed in una nota breve⁷ avevamo puntualizzato che le malte di cemento d'altoforno, se stagionate a dovere, denunciano valori di porosità totale comparabili a quelli delle malte di cemento Portland. Avevamo però sottolineato che la più o meno equivalenza dei valori di porosità per i due tipi di cemento, parametro che così tanto influenza le proprietà meccaniche e la resistenza chimica, non coinvolge anche il processo di carbonatazione. Le malte di cemento d'altoforno ad alto contenuto di scoria, sottoposte a trattamento di carbonatazione, mostrano infatti più alta profondità di penetrazione della stessa, a parità di ogni altra condizione, benché la profondità di carbonatazione diminuisca al crescere del contenuto di SO_3 . Poiché, come più sopra ricordato, in malte di cemento d'altoforno lungamente stagionate, non avevamo riscontrato differenze di porosità, rispetto alle malte di cemento Portland, tali da giustificare senza ombra di dubbio la più alta tendenza alla carbonatazione delle prime, avevamo avanzato l'ipotesi, peraltro da verificare con appropriata sperimentazione, che la maggiore profondità di carbonatazione riscontrata per le malte di cemento d'altoforno fosse da addebitare, particolarmente in quelle a più alto tenore di scoria, al minor quantitativo di calce di idrolisi, in grado di frenare la diffusione della CO_2 negli strati più interni della struttura, tanto più che un fugace accenno a tale possibilità può anche rilevarsi dalla letteratura^{1,8}.

Abbiamo perciò ritenuto interessante indagare sperimentalmente sulla fondatezza di una tale ipotesi, peraltro ragionevole.

2 - PARTE SPERIMENTALE

Si è proceduto alla preparazione di:

- un cemento d'altoforno (Tipo III/B) confezionato con il 29% di clinker industriale, il 68% di scoria granulata ed il 3% di gesso (contenuto totale di SO_3 nel cemento pari al 1,5%);
- un cemento d'altoforno, come il precedente, nel quale il 12,5% è stato sostituito con ossido di calcio preparato di fresco per decarbonatazione del carbonato di calcio polverulento;
- un cemento pozzolanico (Tipo IV/B) confezionato con il 55% del medesimo clinker, il 41% di pozzolana romana ed il 4% di gesso (contenuto totale di SO_3 nel cemento pari al 2,3%);

- un cemento pozzolanico, come il precedente, nel quale il 6,25% è stato sostituito con il medesimo ossido di calcio.

Quale termine di paragone è stato impiegato un cemento Portland (Tipo I), classe 52,5 con un tenore di C_3A pari al 9%. Con tali cementi sono state preparate le relative malte standard⁹ a rapporto acqua-cemento 0,50. I relativi provini, dopo stagionatura in acqua per la durata di 7 giorni, sono stati esposti all'aria sia in atmosfera rurale, sia in ambiente industriale per un periodo di diciotto mesi. Al termine, i provini sono stati sezionati, valutando immediatamente la profondità di carbonatazione con il metodo raccomandato dalla RILEM¹⁰.

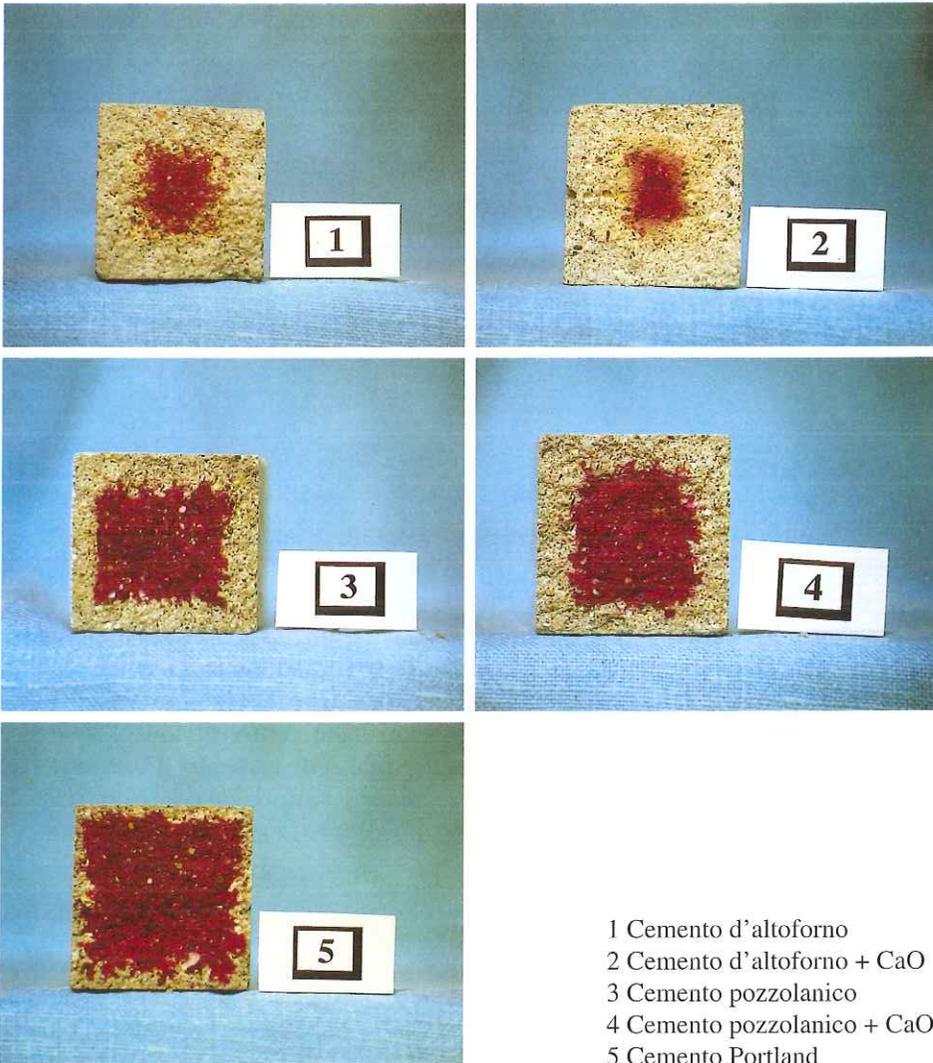
Le relative misure non hanno posto in luce differenze apprezzabili tanto fra la profondità di carbonatazione nelle due distinte atmosfere, quanto per effetto delle aggiunte di ossido di calcio, Tabella 1. Va subito, però, evidenziato che l'artificio da noi messo in pratica e cioè l'aggiunzione di ossido di calcio, crea condizioni che possono risultare certamente lontane da quelle reali, in quanto la calce che si libera per effetto del processo di idratazione risulta verosimilmente interconnessa con i geli di CSH, ne modifica la tessitura e probabilmente ne influenza anche il raggio dei pori. Si deve anche tenere nel debito conto una possibile differente reattività con la CO_2 da parte di un idrossido di calcio di neoformazione, per effetto del processo di idratazione dei silicati, e quello che si produce per semplice reazione con acqua di un ossido chimico.

La porosimetria ad intrusione di mercurio, utilizzata per il rilevamento della porosità totale e della distribuzione delle dimensioni dei pori sulla serie di malte confezionate, ha fornito i risultati riportati in Tabella 2, che, anche in questo caso, convergono nell'attribuire la minore attitudine alla carbonatazione da parte del cemento Portland alla più bassa porosità totale, pur nella distribuzione dei pori spostata verso valori medi più alti.

Dalla Tabella 1 può rilevarsi che non si registrano differenze significative dei valori di profondità di carbonatazione per i provini confezionati con aggiunta di CaO al cemento pozzolanico. Tali valori, inoltre, risultano intermedi fra quelli delle malte di cemento Portland, da un lato, e quelli di cemento d'altoforno, dall'altro. Per le malte di cemento pozzolanico il diametro medio dei pori risulta, infine, il più basso di tutti.

È pertanto innegabile che esista una netta dipendenza tra porosità della malta e permeabilità delle stesse. È verosimile infine che i risultati, non sempre concordanti, riportati in letteratura vadano attribuiti non solo alla laboriosità ed alla limitazione del metodo sperimentale, ma soprattutto alla variazione di

Tabella I



porosità per effetto di differenze nel rapporto acqua-cemento e delle modalità e durata della stagionatura delle malte.

Tabella 2

Cemento	Porosità totale (%)	Diametro medio dei pori (nm)	SO ₃ %
Portland (Tipo I)	5,2	15,0	3,1
Altoforno (Tipo III/B)	13,5	9,5	1,5
Pozzolanicco (Tipo IV/B)	12,0	9,0	2,3

3 - CONCLUSIONI

L'insieme delle risultanze sperimentali e delle deduzioni che è plausibile trarne, privilegiano - pur nella relativa affidabilità dell'artificio sperimentale adottato - il fattore porosità, quale parametro determinante della profondità di carbonatazione delle malte cementizie, senza escludere l'eventualità che la presenza di calce di idrolisi, interconnessa con i geli di CSH, possa costituire un ragionevole freno alla penetrazione della CO₂ negli strati più interni del manufatto. Viene, ad ogni buon conto, ribadito l'interesse dell'effetto di riduzione della porosità nelle malte di cemento d'altoforno ad opera di un "gessaggio" ottimale del legante e sottolineata la significativa ricaduta applicativa di tale effetto nel caso di ricorso al cemento d'altoforno.

4 - RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Ngala V.T., Page C.L., Parrot L.J. and Yu S.W.(1995) *Diffusion in Cementitious Materials: II. Further Investigations of Chloride and Oxygen Diffusion in Well-cured OPC and OPC/30% PFA Pastes*. Cement Concrete Research 25, 819-826.
2. Yu S.W. and Page C.L.(1991) *Diffusion in Cementitious Materials: I. Comparative Study of Chloride and Oxygen Diffusion in Hydrated Cement Pastes*. Cement Concrete Research 21, 581-588.
3. Burlamacchi L. (1994) *Capire il Calcestruzzo*. Hoepli, Milano, pp 172-176.

4. Houst Y.F. and Wittmann F.H. (1994) *Influence of Porosity and Water Content on the Diffusivity of CO₂ and O₂ Through Hydrated Cement Paste*. Concrete Research 24, 1165-1176.
5. De Ceukelaire L., Van Nieuwenburg D. (1993) *Accelerated Carbonation of a Blast-Furnace Cement Concrete*. Cement Concrete Research 23, 442-452.
6. Sersale R., Cioffi R., Frigione G., Zenone F. (1992) *SO₃ Content of Portland and blended cements porosity and behaviour of resultant mortars*. Proc. 9th International Congress on the Chemistry of Cement. National Council for Cement and Building Materials, New Dehli, III, 173.
7. Sersale R., Frigione G., Cioffi R., de Vito B., Zenone F. (1995) *A discussion of the paper: "Carbonation and porosity of mortar specimens with pozzolanic and hydraulic cement admixtures"* by Malami Ch, Kaloidas V., Batis G. and Kouloumbi N.; Cement Concrete Research 25, 1803.
8. Saetta A.V., Schrefler B.A. Vitaliani R.V. (1993) *The Carbonation of Concrete and the Mechanism of Moisture, Heat and Carbon Dioxide Flow Through Porous Materials* Cement Concrete Research 23, 761-772.
9. International Standard Organization R679, EN 196/1.
10. RILEM Draft Recommendation CPC 18 (1988).

Alcuni aspetti della Scuola matematica napoletana: fantasia matematica e proiezione internazionale

Nota di Salvatore Rionero¹

Presentata dal socio Salvatore Rionero

(Adunanza del 7 novembre 1996)

1. Introduzione

L'origine della Scuola Matematica Napoletana, come vedremo, si può far risalire almeno al 1653. Da allora a tutt'oggi - compatibilmente con le situazioni politiche e belliche - è sempre stata viva e vitale e molti dei grandi matematici mondiali appartengono ad Essa. In questa prolusione² - dopo aver precisato il significato di *fantasia matematica e proiezione internazionale* - potrò riferirmi solo ad alcuni momenti della Scuola e, purtroppo, considerare solo pochi dei Grandi che vi hanno appartenuto. Precisamente mi limiterò ad alcune considerazioni sui seguenti punti:

1) origini della Scuola;

¹Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"
Compl. universitario Monte S. Angelo, Via Cintia - 80126 Napoli

²Prolusione tenuta il 5 febbraio 1996 all'apertura dell'Anno Accademico 1995-1996.

- 2) la Scuola dal tardo Settecento all'Unità d'Italia: ruolo di Nicolò Fergola e dei suoi allievi;
- 3) alcuni illustri matematici della Scuola Napoletana dall'Unità d'Italia alla seconda guerra mondiale;
- 4) la Scuola dal II dopoguerra alla metà degli anni sessanta: ruolo di R. Caccioppoli e C. Miranda;
- 5) posizione attuale della Scuola e sue prospettive.

Per quanto riguarda i due aspetti che desidero mettere in evidenza, preciso che con *proiezione internazionale* intendo sottolineare il fatto che sia la didattica che la ricerca scientifica della Scuola sono generalmente state bene inserite in quelle internazionali e che la Scuola ha sempre cercato collegamenti internazionali. L'uso poi dell'espressione *fantasia matematica* per una disciplina che tradizionalmente viene ritenuta fredda e priva di fantasia, può sembrare una contraddizione. Ma così non è. Possedere fantasia matematica significa - come del resto è per altre discipline - avere non solo una grande intuizione ma anche la capacità di:

- 1) immaginare percorsi logici diversi e più brevi di quelli già noti per raggiungere un prefissato risultato;
- 2) immaginare e dimostrare verità generali ed innovative che spostino avanti la frontiera della conoscenza (partendo magari da considerazioni semplici ed intuitive).

Molti dei risultati di matematica che attualmente fanno parte del patrimonio culturale di tutti - si pensi ad esempio al fatto che il percorso più breve per andare da un punto A ad un punto B è il segmento di retta \overline{AB} - ci sembrano ovvii e ...privi di fantasia. Eppure l'aver immaginato la loro validità e averla dimostrata è stato

tutt'altro che banale. Il fatto è che (come scrive R. Caccioppoli a F. Cafiero in una lettera del 3.10.51) *“diventano banali i risultati più riposti, una volta acclarati. Le dimostrazioni veramente belle sono quelle che fanno dire: Come? Tutto qui?”*

2. Origini della Scuola

La tentazione di andare a ricercare i lontani prodromi della Scuola nel 500 a.C., nella scuola filosofica della vicina Elea (Velia, presso Vallo della Lucania) è molto forte. Basti ricordare che a detta Scuola appartiene Zenone (detto appunto di Elea) autore del celebre paradosso di Achille e la tartaruga: il veloce Achille non raggiungerà mai la lenta tartaruga giacché nell'intervallo di tempo che lo separa dalla tartaruga ad un certo istante, questa si è spostata in avanti e così via. Naturalmente Zenone sapeva bene che Achille avrebbe raggiunto rapidamente la tartaruga. Egli però non riusciva a capire perché la somma di infinite quantità positive potesse dar luogo ad una quantità finita. Infatti Egli non aveva il concetto di limite, che è un cardine fondamentale della matematica moderna, con cui immediatamente si supera il paradosso. Ma la Scuola Eleatica è patrimonio dell'intera umanità e non può essere assunta come prodromo della Scuola matematica napoletana. Prodromi più plausibili potrebbero essere trovati nelle opere di Giordano Bruno (Nola, 1548 - Roma, Campo dei fiori, 17.2.1600), soprattutto tenendo conto dei suoi contributi al concetto di infinito. Ma la matematica di Bruno è ancora una matematica “magica” che non soddisfa i severi requisiti della logica matematica e le estensioni del concetto di infinito. Ad esempio, in Bruno manca il significato di confronto fra infiniti.

Ormai è norma far risalire le origini della Scuola all'11 novembre 1653, anno a partire dal quale è stata sempre presente almeno una

cattedra di matematica nell'Università di Napoli. Essa fu ricoperta da Tommaso Cornelio. Federico Amodeo (1859-1946), nell'opera in due volumi sulla *Vita Matematica Napoletana* [1] scrive: *“Gli studi, che a Napoli avevano avuto un certo splendore sotto i Normanni, gli Svevi, gli Aragonesi, decadde sotto la dominazione Spagnola. La restaurazione degli studi fu iniziata nel 1615 dal viceré Fernando de Castro, conte di Lemos, il quale ebbe anche il merito di destinare alle scienze, che molto incomodamente s'insegnavano in S. Domenico Maggiore, l'ampio edificio eretto per la real cavallerizza fuori la porta di Costantinopoli (l'attuale Museo). Seguì, subito dopo (1616), la prammatica del duca di Ossuna, che metteva in bilancio una cattedra di Matematica con lo stipendio di 60 ducati. Che a questa cattedra fosse provveduto prima del 1650 lo mettono in dubbio l'Origlia e altri storici dell'epoca, ma a noi consta che ... nel 1653 fu affidata, con lo stipendio di 110 ducati, al filosofo e matematico Tommaso Cornelio. Egli la sostenne per trent'anni circa reggendo per qualche tempo anche Astronomia e producendo allievi illustri. Egli introdusse in Napoli le opere di Renato Descartes, con le quali introdusse la libertà di filosofare, scosse le menti sopite nel letargo dell'antica scuola, e facendo vedere di quanto aiuto la Geometria fosse alla Fisica, ed il vantaggio dell'applicazione delle leggi fisiche alla Medicina, ottenne che la Geometria si imparasse financo dai forensi”*.

Va precisato - proprio per mettere in luce il collegamento della Scuola, fin dal suo inizio, con altre Scuole - che il Cornelio (nato a Rovereto, presso Cosenza, nel 1612) prima era stato a Firenze ed a Bologna ove, rispettivamente, aveva stretto amicizia col matematico Evangelista Torricelli (scopritore del noto principio dell'idrodinamica che porta il suo nome) e col gesuita e matematico Bonaventura Cavalieri (il cui nome è legato ad un famoso principio di geometria).

3. La Scuola dal tardo Settecento all'Unità d'Italia: ruolo di Nicolò Fergola e dei suoi allievi

Nicolò Fergola (1753-1824) - anche alla luce di recenti studi [2-4] - è la figura più influente della Scuola matematica napoletana dal tardo Settecento all'Unità d'Italia. A lui ed ai suoi allievi si devono i più interessanti contributi matematici prodotti dalla Scuola nel suddetto periodo.

Aveva studiato fino all'età di 14 anni dai Gesuiti - custodi a Napoli di una buona tradizione matematica - acquisendo un'ottima conoscenza delle problematiche matematiche dell'antichità. Successivamente - da autodidatta - si informò su quanto di più avanzato avveniva in Europa nel campo dell'Analisi, della Geometria e della Meccanica. Era pertanto in grado di intendere e discutere i più importanti contributi forniti da Newton, Eulero, Lagrange ed altri grandi dell'epoca. Era un uomo schivo, di carattere mite ed equilibrato, molto religioso e poco interessato agli onori ed alla gloria. Viveva appartato e, pur essendo certamente un conservatore, fu stimato e apprezzato dai vari regimi che si succedettero nel tormentato periodo in cui visse. Nicolò Fergola profuse il suo genio matematico ed il suo sapere sia nelle lezioni che teneva all'Università (Liceo del Salvatore) sia in quelle tenute nel suo studio privato che aveva aperto fin dal 1771 e che ben presto divenne celebre. Egli fu convinto assertore del metodo sintetico su quello analitico in Geometria, ed anche il suo contributo all'Analisi Matematica viene attualmente molto rivalutato [3-4]. La sua didattica era avanzata e secondo Amodeo [1], già negli anni 1771-1772 adottò come guida delle sue lezioni al Liceo del Salvatore i *Principi matematici della Filosofia naturale* di Isacco Newton (1642-1727) in cui - com'è noto - sono gettate le basi di buona parte della Scienza moderna. Aveva una concezione moderna della scienza, come bene da mettere a disposizione di tutti. Ebbe numerosi allievi, cui proponeva temi di ricerca

di livello avanzato, e tra questi ricordiamo Annibale Giordano, Carlo Lauberg e Vincenzo Flauti. Forse il Giordano (10.11.1769 Ottajano; 13.3.1835 Troyes- Francia) fu il suo allievo più dotato. Nel 1786 gli fece continuare un suo lavoro scientifico e glielo fece *recitare* alla Regia Accademia delle Scienze di Napoli, cui il Giordano non apparteneva per la giovane età (aveva appena 17 anni!). Da allora - per la bontà della ricerca effettuata - fu concesso al Giordano di partecipare alle sedute Accademiche ed inoltre egli ricevette un sussidio mensile dal Re. L'anno seguente il Fergola propose al Giordano di risolvere il cosiddetto problema di Cramer (o di Pappo) che, nella sua forma più elementare, si enuncia così: *Data una circonferenza e tre punti esterni ad essa, inscrivere nella circonferenza un triangolo i prolungamenti dei cui lati passino per i tre punti assegnati.* La risoluzione di tale problema era costata al Castiglione molti anni di studio. Inoltre la sua generalizzazione al caso del quadrilatero non era riuscita in Russia al matematico Lexel. Ebbene il Giordano risolse rapidamente il problema nel caso di un poligono qualsiasi. Ciò diede a Lui ed alla Scuola di Fergola gran rinomanza internazionale.

L'armonia che regnava tra gli allievi di Fergola si ruppe sotto l'urto delle passioni politiche e degli avvenimenti che videro gli allievi svolgere rilevanti ruoli politici, sia nell'ambito della Repubblica Partenopea (1799), sia tra le file del lealismo borbonico. Infatti il Lauberg ed il Giordano furono ferventi giacobini ed esponenti di rilievo della Repubblica Partenopea. Vincenzo Flauti invece fu un fervente lealista. Al cadere della Repubblica il Giordano subì il carcere e la condanna a morte cui riuscì a sfuggire per effetto del trattato di Lunewille (9.4.1801) che impose a Ferdinando IV di mettere in libertà i detenuti politici. Da allora Egli visse in Francia, ove morì nel 1835³.

³Nel 1999, in sintonia con le altre manifestazioni culturali della Città per il secondo centenario della Repubblica Partenopea, è previsto a Napoli il Congresso

4. Alcuni illustri matematici napoletani dall'Unità d'Italia alla II guerra mondiale

Nel periodo che va dall'Unità d'Italia alla seconda guerra mondiale (1860-1940) molti sono stati i matematici napoletani illustri e tra questi ricordiamo: Alfredo Capelli, Ernesto Pascal, Nicola Trudi, Giuseppe Battaglini, Ernesto Cesaro, Gabriele Torelli, Achille Sanna, Pasquale del Pezzo, Alfonso del Re, Francesco Siacci, Roberto Marcolongo, Enrico D'Ovidio. Per lumeggiare le loro opere occorrerebbe ben altro tempo. Io mi limiterò ad accennare solo ad alcuni tratti essenziali relativi a Battaglini, Pascal, Marcolongo e Cesaro.

GIUSEPPE BATTAGLINI (Napoli 11.1.1826; 29.4.1894)

Fu essenzialmente un geometra. Fu membro di varie Accademie tra cui quella dei Lincei (dal 1873). Contribuì, con l'opera personale e l'incitamento agli altri, al rinnovamento della cultura matematica in Italia. Nel 1863 fondò, a Napoli, la rivista scientifica il "Giornale di Matematica" a cui poi si associò il suo nome.

ERNESTO PASCAL (Napoli 7.2.1865; 25.1.1940)

Si laureò a Napoli nel 1887 e successivamente seguì corsi di perfezionamento a Pisa ed a Göttingen (alla scuola di Klein). A 25 anni, per concorso, divenne docente di Calcolo Infinitesimale a Pavia, passando successivamente a Napoli dal 1907. Ideò e fece realizzare numerosi strumenti per il calcolo grafico (integrati) che furono anche premiati in varie mostre internazionali. Fu autore di libri che sono stati di grande utilità per gli studi matematici in Italia come, ad esempio, quello sui determinanti [5] e quello di esercizi critici di Analisi [6]. Fu socio di varie Accademie tra cui quella dei Lincei.

dell'Unione Matematica Italiana.

ROBERTO MARCOLONGO (Roma 28.8.1862; 16.5.1943)

Nel 1895 divenne - in seguito a concorso - professore di Meccanica Razionale all'Università di Messina, passando poi nel 1908 a Napoli, ove rimase fino al 1935, anno in cui andò in pensione. In numerosi lavori (circa 250) e trattati - redatti in collaborazione con Burali-Forti - contribuì notevolmente alla sistemazione e diffusione del calcolo vettoriale, linguaggio fondamentale per gli sviluppi della Fisica Matematica [7]. Fu socio di varie Accademie, tra cui quella dei Lincei.

ERNESTO CESARO (Napoli 12.3.1859; Torre Annunziata 12.9.1906)

Compì i suoi studi in parte a Napoli ed in parte a Parigi e a Liegi (ove fu allievo di Eugène Catalan). Divenne, per concorso, professore di Analisi Algebrica dell'Università di Palermo nel 1886. Passò a quella di Napoli nel 1891. Morì nel mare in tempesta di Torre Annunziata, nel vano tentativo di salvare un figlio. Di lui il Tricomi, nella *Memoria sui Matematici italiani del primo secolo dello Stato Unitario* [8] dice: “È stato uno dei più geniali matematici italiani dell'ultimo secolo che ha spaziato con sovrana padronanza nei più svariati campi della matematica”. Uno dei massimi matematici dell'epoca, Charles Hermite, dopo aver letto un trattato di Analisi Algebrica del Cesaro, gli scrive: “*Vous avez trouvé le secret de dépouiller la science des difficultés*” paragonandolo poi a Gauss ed a Jacobi. Fondatore della teoria di sommazione delle serie divergenti, fu socio di varie Accademie, tra cui quella dei Lincei e la Società Reale di Liegi.

5. La Scuola Napoletana dal II dopoguerra alla metà degli anni Settanta: ruolo di Renato Caccioppoli e Carlo Miranda

Nel 1943 Renato Caccioppoli (Napoli, 20.1.1904 - 8.5.1959) e Carlo Miranda (Napoli, 15.8.1912 - 28.5.1982) sono entrambi professori del-

l'Università di Napoli. Entrambi sono stati allievi di Mauro Picone, celebre fondatore dell'Istituto di Calcolo per l'Analisi Numerica. Infatti il Picone aveva ricoperto a Napoli dal 1925 al 1932 la cattedra di Analisi Infinitesimale. Durante tale periodo egli raccolse attorno a sé ed avviò alla ricerca un gruppo di giovanissimi di gran talento tra cui Renato Caccioppoli e Carlo Miranda. Questi giunsero alla Cattedra in brevissimo tempo: il Caccioppoli nel 1931 a Padova sulla cattedra di Analisi Algebrica, passando poi a Napoli nel 1934; il Miranda nel 1937 (a soli 25 anni!) a Genova sulla stessa cattedra, passando prima al Politecnico di Torino e poi a Napoli definitivamente.

Nel 1943 la situazione delle strutture universitarie a Napoli era disperata. La guerra e le truppe alleate che vi avevano soggiornato le avevano rese inagibili. Miranda, in una Nota del 1977 [9], scrive: *“Quanto ai locali, allo sgombero delle truppe alleate, poco dopo la liberazione di Roma, ci si trovò di fronte a una situazione disastrosa perché i mobili (dei Gabinetti e della Sala Battaglini) erano semidistrutti insieme con alcune aule e i libri (delle varie biblioteche) erano ammucchiati per terra in uno stanzone, allora privo di pavimento. Distrutti anche gli inventari e gli schedari e quanto avrebbe potuto servire”*. Miranda, munito di grandi capacità organizzative, pose subito mano alla rinascita e per unificare le risorse disponibili nei vari Istituti allora presenti - legati ciascuno ad una cattedra (ben otto ed in più vi era anche il Seminario Matematico) - propose la costituzione di un unico Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze in cui confluissero tutte le cattedre di matematica. La Facoltà approvò la proposta nella seduta del 28.9.1944. Successivamente Egli passò alla costituzione della Biblioteca del nato Istituto, raccogliendo il materiale librario dei singoli Istituti preesistenti e quello del Seminario Matematico. Fu un lavoro lungo e faticoso in cui vi fu “la validissima collaborazione di Don Savino Coronato, di Federico Cafiero e di un gruppo di giovanis-

simi, laureatisi fra il 1944 e il 1945, che fecero poi tutti una brillante carriera: Guido Stampacchia, Donato Greco, Carlo Ciliberto e Franco Stoppelli” [9]. Ora la biblioteca del Dipartimento di Matematica ed Applicazioni dell’Università Federico II di Napoli, erede del vecchio Istituto di Matematica, porta appunto il nome di “Biblioteca C. Miranda”.

Cominciò allora per la Scuola Matematica napoletana una brillantissima stagione i cui frutti durano ancora oggi. Alle geniali capacità intuitive di Caccioppoli si affiancavano la possente razionalità e le capacità organizzative di Miranda. Ad essi si aggiunsero ben presto:

1. GUIDO ZAPPA - fondatore della Scuola Italiana di Teoria dei Gruppi - dal 1946 al 1953 a Napoli su una cattedra di Geometria [20]
2. CARLO TOLOTTI - allievo e continuatore di Antonio Signorini, fondatore della Scuola Italiana di Elasticità non lineare - su Meccanica Razionale dal 1946 [16], [20]
3. ALFREDO FRANCHETTA - illustre geometra, su un’altra cattedra di Geometria dal 1953 [20]
4. FEDERICO CAFIERO - brillantissimo allievo di Caccioppoli, internazionalmente noto per le sue ricerche di Teoria della Misura - su Analisi Matematica dal 1959 [17], [20].

Si costituì così un *team* di Maestri, accomunati dall’amore per la scienza e la generosità nel trasmetterla. Gli allievi - diretti o indiretti - che hanno raggiunto la cattedra si contano a decine e molti sono diventati a loro volta studiosi e Maestri di grande prestigio [20].

Cosa dire sui contributi scientifici di Miranda e Caccioppoli? C’è solo l’imbarazzo della scelta in quanto essi hanno spaziato in lungo

e in largo nei sentieri della matematica più elevata lasciando tracce potenti ed indicando strade nuove [17-20].

Per quanto riguarda Carlo Miranda mi limito a ricordare che il suo contributo più poderoso riguarda la Teoria delle Equazioni a Derivate Parziali di Tipo Ellittico. La sua monografia su tali equazioni [10] è tuttora ovunque citata nel mondo dai ricercatori che lavorano in tale campo e costituisce un fondamentale punto di riferimento. Ricordo poi che nel 1952 ha fondato la rivista scientifica “Ricerche di Matematica”.

Le doti di Maestro di Miranda sono state magistralmente descritte da Avantaggiati, già suo allievo, come segue [11]: *“A partire dagli anni Cinquanta Miranda tenne, alternandosi con Caccioppoli finché questi fu in vita, un Corso avanzato ora di Teoria delle Funzioni ora di Matematiche Superiori a carattere quasi seminariale per gli studenti dell’ultimo anno, ma prevalentemente orientato alla formazione degli Assistenti. La mole di argomenti che riusciva a trattare in ciascuno di tali corsi era sorprendente. Era sempre in grado di stabilire i risultati più profondi con maestria eccezionale sui modelli più significativi, nei casi concreti, lasciando aperti gli spiragli alle generalizzazioni o a semplici variazioni sul quadro delle ipotesi mettendo le pulci nell’orecchio, come argutamente soleva dire”*.

Passando a Renato Caccioppoli, va subito detto che egli è stato anticipatore di risultati che si sono poi intersecati con quelli trovati successivamente da altri grandi Matematici stranieri quali il Weyl ed il Banach {Cfr. [12]}. Nel 1953 la Commissione che gli conferì il Premio Nazionale di Scienze Fisiche e Matematiche dell’Accademia dei Lincei scrisse: *“Caccioppoli è già da tempo pervenuto ad una posizione internazionale di primo piano fra quei non molti cultori della Matematica che la fanno effettivamente progredire con scoperte che aprono nuove possibilità e nuovi orizzonti e con la creazione di fecondi metodi di ricerca”*. Passando alle sue doti di Maestro, Miranda stesso

in [9] afferma che dopo la partenza di Picone da Napoli: "Caccioppoli per la guida prestata ai giovani che erano stati con lui alla scuola di Picone, divenne un secondo Maestro". Le lettere che Caccioppoli scrisse a Cafero nel 1951 sono poi una commovente testimonianza dell'arguzia e dell'interesse con cui seguiva gli allievi e del male oscuro che albergava in Lui e che lo portò a morte volontaria nel 1959.

Napoli 3-X-51

Come diventano banali i risultati più riposti, una volta acclarati!
Le dimostrazioni veramente belle sono quelle che fanno dire: Come?
Tutto qui? Le sue (così "squisitamente" "complementari") sono di questo genere. Lei dormiva evidentemente scrivendo le ultime righe della seconda: ma aveva ben diritto al riposo. Congratulazioni, ed un ad maiora non convenzionale perché convinto ~~per~~ ~~per~~ ~~per~~

Napoli, 3-X -51

Come diventano banali i risultati più riposti, una volta acclarati!

Le dimostrazioni veramente belle sono quelle che fanno dire: Come? Tutto qui? Le sue (così "squisitamente" "complementari") sono di questo genere. Lei dormiva evidentemente scrivendo le ultime righe della seconda: ma aveva ben diritto al riposo.

Congratulazioni, ed un ad maiora non convenzionale perché convinto.

Suo aff.mo
Renato Caccioppoli

1894 22 ottobre 51

Caro Capicci, questa è la buona notizia. Con
la teoria dell'integrazione per cui si «canta-
colerebbe» in tre termini: quello di Liebig, quello
di Vitalie - terzo e definitivo il terzo
di Capicci. Glielo invierò, se fossi capace
di invidia, e se l'unica mia preoccupa-
zione personale non fosse la morte,
esclusiva di ogni futura pensiero di
immortalità.

Due poi che ha stimolato la mia curiosità,
i affetti a vedermela incombenti la dimo-
strazione. Sempre che Lordi (l'unica prova

REPUBBLICA
CARTOLINA



al mondo sopra di
tante) non riesca prima
a strapparla alle braccia
di Catignola.

Se ha qualche difficoltà
ad accettare i miei
avoli onegni, li prego
almeno alle post. Signor.

Le aff=



Prof. Dott.
Federico Capicci

Catignola

(Ravenna)

Napoli, 11 ottobre 51

Caro Cafiero, grazie della buona notizia. Così la teoria dell'integrazione per serie si "articolerebbe" in tre teoremi: quello di Lebesgue, quello di Vitali e - terzo e definitivo - il teorema di Cafiero. Glielo invidierei, se fossi capaci di invidia, e se l'unica mia preoccupazione personale non fosse la morte, esclusiva di ogni futile pensiero di immortalità.

Ora però che ha stimolato la mia curiosità, si affretti a soddisfarla inviandomi la dimostrazione. Sempre che Lordi (l'unica persona al mondo capace di tanto) non riesca prima a strapparla alle delizie di Cotignola.

Se ha qualche difficoltà ad accettare i miei devoti ossequi, li porti almeno alla gentile Signora.

Suo aff.mo

Renato Caccioppoli

Oggi il "Dipartimento di Matematica e Applicazioni" dell'Università di Napoli Federico II - che riunisce i matematici delle Facoltà di Scienze e di Ingegneria - porta il suo nome, come era già avvenuto negli anni '70, per l'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze [12], [13], [17], [19].

6. Posizione attuale della Scuola e sue prospettive

Già da svariati anni ai quattro filoni tradizionali di didattica e ricerca scientifica Analisi, Fisica Matematica, Geometria e Algebra se ne sono aggiunti altri, quali Calcolo delle Probabilità e Statistica, Calcolo Numerico, Logica Matematica, Biomatemática, Didattica della Matematica e Storia della Matematica [9], [20]. La sede preminente

di tali attività è il Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli” dell’Università di Napoli Federico II, ubicato nella sede di Monte S. Angelo. Esso è anche la sede di due Dottorati (Dottorato di Ricerca in Matematica e Dottorato di Ricerca in Matematica Applicata ed Informatica) cui sono consorziate diverse altre Università.

La tradizionale proiezione internazionale della Scuola si è molto dilatata e ogni anno decine di ricercatori stranieri di gran prestigio visitano il Dipartimento per contatti scientifici e lavori in collaborazione. Analogamente molti docenti, ricercatori e dottorandi di Scuola Napoletana trascorrono periodi di studio presso strutture di Ricerca ed Università Straniere. Svariati sono i lavori scientifici fatti, ogni anno, dai matematici napoletani in collaborazione con ricercatori stranieri. Non mancano trattati su argomenti di avanguardia scritti da Matematici della Scuola Napoletana, anche in collaborazione internazionale, e pubblicati da case editrici estere di prestigio {Cfr., ad esempio, [21], [22], [23], [24]}.

Sarebbe troppo semplice e trionfalistico prevedere un futuro sempre più roseo per la Scuola Matematica Napoletana. Naturalmente vi sono i problemi collegati all’esiguità dei finanziamenti per la Ricerca e le Università. Ma, ed è ciò che conta, grazie ad un’accurata selezione fondata solo su capacità e merito, non mancano neppure i giovani talenti dotati di fantasia matematica. È ad essi che dobbiamo affidare il messaggio pervenutoci dalla Scuola: *amore per la Scienza e generosità nel trasmetterla, in un clima di moderazione e buon senso orientato ad una sempre maggiore proiezione internazionale.*

Riferimenti bibliografici

- [1] F. Amodeo, *Vita Matematica Napoletana I, Vita Matematica Napoletana II*. Napoli, Tipografia Giannini, 1905,1924.

- [2] G. Ferraro, F. Palladino, "Sui manoscritti di Nicolò Fergola", *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, XII, fasc. 2, (1993), pp. 147-197.
- [3] G. Ferraro, F. Palladino, "Il calcolo sublime di Eulero e Lagrange esposto col metodo sintetico nel progetto di Nicolò Fergola". Napoli, Ist. Studi Fil., ed. La Città del Sole, 1995.
- [4] P. de Lucia, G. Ferraro, F. Palladino, "Alcuni tratti della Matematica Napoletana prima e dopo la Repubblica Partenopea del 1799", *Atti Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli*, (1995).
- [5] E. Pascal, **I determinanti**. Milano, Hoepli, 1923 (II edizione).
- [6] E. Pascal, **Esercizi critici di calcolo differenziale ed integrale**. Milano, Hoepli, 1921 (III edizione).
- [7] L. Carbone, G. Cardone, F. Palladino, "La corrispondenza epistolare tra E. Cesaro e R. Marcolongo", *Atti Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli*, Serie IV, LXI, (1994).
- [8] F. G. Tricomi, "Matematici Italiani del primo secolo dello stato unitario", *Memorie Acc. delle Scienze di Torino*, Serie IV, 1, (1962).
- [9] C. Miranda, "Breve storia e prospettive future dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze", *Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli*, 4, 44, 1977.
- [10] C. Miranda, **Partial differential equations of elliptic type**. 2nd ed., Springer Verlag, 1970.
- [11] A. Avantaggiati, Carlo Miranda, *Boll. U.M.I.*, VI, IV-A, n. 1, (1985), pp. 137-153.
- [12] C. Sbordone, "L'opera matematica di R. Caccioppoli", *Atti del Convegno "Il pensiero matematico del XX secolo e l'opera di R. Caccioppoli"*. Napoli, Ist. It. Studi Fil., 1989.
- [13] C. Sbordone, "I contributi di R. Caccioppoli alla teoria dei punti fissi", in **Aspetti della Matematica Italiana del Novecento**, a cura di L. Carbone e A. Guerraggio. Napoli, ed. Città del Sole. Ist. It. Studi Fil., 1995.

- [14] R. Caccioppoli, "Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale", *Rend. Acc. Naz. Lincei*, VI, 11, (1930).
- [15] S. Rionero, "Global solution to a non-linear integral evolution problem in particle transport theory", *Atti. Acc. Sc. Torino, Suppl.* vol. 120, (1986).
- [16] L. Salvadori, "Carlo Tolotti", in *Profili e Ricordi della Società Nazionale Scienze Lettere e Arti in Napoli*, XX, (1993).
- [17] P. de Lucia, "Analisi Reale e Teoria della Misura a Napoli: R. Caccioppoli, C. Miranda, F. Cafiero", in *Seduta inaugurale dell'Anno Accademico 1988, Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli*.
- [18] Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" (a cura di), *Atti della Giornata di Studio in Ricordo del Professore Carlo Miranda*. Napoli, 1994.
- [19] RISMA - Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" (a cura di), *Sulla figura di Renato Caccioppoli*, con interventi di C. Ciliberto, M. Curzio, P. Fergola, S. Rionero, M. Valenzi, C. Sbordone, C. Meola, E. Sassi, M. Martone, F. Ramondino, S. Bisogni, G. Volpicelli, R. Musto, F. Vitiello, R. La Capria, G. Marotta, G. Di Napoli, F. Guizzi, C. Petrella, E. Minicozzi, G. Baffi. Napoli, Tipografia Pesole, 1994.
- [20] C. Ciliberto, *Breve storia della Scuola Matematica Napoletana*. Seconda Università di Napoli, Caserta, 7 giugno 1994.
- [21] M. Curzio, *Some problems of Sylow type in locally finite groups*. London, Acad. Press, 1979.
- [22] G.P. Galdi, S. Rionero, *Weighted energy methods in Fluid Dynamics and Elasticity*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer-Verlag, vol.1134, 1985.
- [23] B. Amberg, S. Franciosi, F. de Giovanni, *Products of Groups*. Oxford, Oxford Un. Press, 1992.
- [24] J. Flavin, S. Rionero, *Qualitative Estimates for Partial Differential Equations. An Introduction*. C.R.C. Press, U.S.A., 1995.

- [25] L. Carbone, P. Nastasi, F. Palladino, "I carteggi Torelli - Cesaro, Landau - Cesaro, Cipolla - Cesaro e alcune questioni connesse", *Nunci-
us, Ann. Ist. e Museo di Storia della Scienza di Firenze*, 1 (1996).
- [26] L. Carbone, G. Ferraro, F. Palladino, "The epistolary human and
scientific relationship between Eugene Catalan and Ernesto Cesaro",
in corso di stampa su *Revue de Questions Scientifiques*, Namur (Bel-
gio).
- [27] G. Torelli, "La Facoltà matematica di Napoli nel periodo dal 1860
al 1875", *Atti Acc. Pont.*, **LIII**. Memoria n. 5
- [28] A. Morelli, F. Palladino, "Sui modelli matematici in gesso", *Lettera
PRISTEM*, Dossier didattica n.6 (novembre 1992), pp. XIII-XVI.
- [29] G. Casadio, G. Zappa, "I contributi di Alfredo Capelli alla teoria
dei gruppi", *Boll. St. Sc. Mat.*, 11 (1991), 25-24.
- [30] C. Boyer, **Storia della Matematica**. Milano, Feltrinelli.
- [31] M. Kline, **Storia del pensiero matematico**, (trad. it. a cura di
A. Conte). Torino, Einaudi, 1991.
- [32] G. Loria, **Storia della Matematica**. Milano, Hoepli, 1950.
- [33] I. Torraca, G.M. Monti, R. Filangieri di Candida, N. Cortese, M.
Schipa, A. Zazo, L. Russo, **Storia dell'Università di Napoli**.
Napoli, R. Ricciardi ed., 1924.
- [34] G.G. Origlia, **Storia dello Studio di Napoli**. Napoli, Stamperia
di Giovanni di Simone, 1753. (Ristampa anastatica. Napoli, Editore
riale Scientifica, 1983).
- [35] *Ricerche di Matematica*, **XL**, (1991). Supplemento. Atti dell'*Inter-
national Symposium R. Caccioppoli*, con interventi di G. Fichera, P.
de Lucia, M. Valenzi, G. Marotta, F. Guizzi, M. Torrini, A. Avan-
taggiati, M. Miranda, E. Vesentini.
- [36] P.A. Toma, **Renato Caccioppoli. L'enigma**. Napoli, Edizioni
Scientifiche Italiane, 1992.
- [37] D. Greco, "Carlo Miranda". Collana "Profili e Ricordi della Soc.
Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli", **XII**, (1993).

*“In memory of Eduardo R. Caianiello,
great scientist and keen teacher,
whose pioneering work
enlightened and inspired our research.”*

Caianiello's maximal acceleration in string dynamics ¹

Nota di Antonio Feoli^{2 3} e Gaetano Scarpetta ^{2 3}

Presentata dal Socio Gaetano Scarpetta
(Adunanza del 9 novembre, 1996)

Key words :: string theory, maximal acceleration

Abstract - Caianiello's model of relativistic dynamics with maximal acceleration is used to analyze the behaviour of an open string with massive ends in Rindler space. A critical value of string acceleration less than the maximal one is found. Even in the case in which the distance L between the ends of the string vanishes, the acceleration does not diverge. It is possible an equilibrium configuration for the string when its proper length vanishes (point-particle limit) only if the acceleration reaches its maximal value.

Riassunto - La dinamica di una stringa aperta, con masse agli estremi, nello spazio di Rindler è studiata utilizzando il modello di Caianiello con accelerazione massima. È stato trovato un valore critico per l'accelerazione (minore di quello massimo) al di sopra del quale non esistono configurazioni di equilibrio per la stringa uniformemente accelerata. L'accelerazione non diverge perfino nel caso in cui la distanza L fra gli estremi della stringa tende a zero. È possibile per la stringa, avere una configurazione di equilibrio quando la sua lunghezza propria tende a zero (limite di particella puntiforme) solo se l'accelerazione raggiunge il suo valore massimo.

¹Research supported by MURST fund 40% and 60%, DPR 382/80

²Dipartimento di Scienze Fisiche "Eduardo R. Caianiello" Università di Salerno, 84081 Baronissi (Salerno)

Istituto Internazionale per gli Alti Studi Scientifici "E.R.Caianiello", via G. Pellegrino 19, 84019 Vietri sul Mare, (SA)

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Napoli.

³E.mail: Feoli@vaxsa.csied.unisa.it Scarpetta@vaxsa.csied.unisa.it

1 - INTRODUCTION

The maximal proper acceleration of a massive particle in arbitrary motion, a new fundamental constant of nature, has been introduced by Caianiello [1] reinterpreting quantum physics in the light of the principles governing information theory and modern system theory [2,3,4]. The inconsistencies of physical theories at very short distance, indicating that the small scale structure of space-time might not be adequately described by classical continuum four-dimensional geometry, induced Caianiello to propose a geometric approach to quantum mechanics. In this scheme the commutators between coordinates and momenta are interpreted as the components of the curvature tensor of the eight dimensional space-time tangent bundle TM, which acquires a metric structure. A simple and enlightening introduction to maximal acceleration was derived later from the first principles of Quantum Mechanics and Relativity [5], emphasizing its deep interconnection with the extended nature of particles.

Starting from different motivations and from different theoretical schemes, many papers [6,7,8,9,10,11] have been published on this subject; in some of these works the upper limit is fixed by the Planck mass

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}},$$

in others it depends, as in Caianiello's proposal, on the rest mass of the particle.

It is well known that massive extended objects imply critical accelerations, determined by the extension of the particles and by the causal structure of the space-time manifold. For instance, in classical relativity [12], an object of proper length λ , in which one extreme point is moving with acceleration a with respect to the other, will develop a Rindler horizon at a proper distance a^{-1} from the accelerated extremity, so that all parts of the object can be causally connected only if $\lambda < a^{-1}$. This implies a proper critical acceleration $a_c \simeq \lambda^{-1}$ which depends on λ and diverges in the limit in which the object reduces to a point-like particle.

In the quantum relativistic context, the analysis of string propagation in cosmological backgrounds revealed that accelerations higher than the critical one give rise to the onset of Jeans-like instabilities [13] in which the string oscillating modes develop imaginary frequencies and the string's proper length diverges. Gasperini [14] has given a very interesting kinematic interpretation of this string instability showing that it occurs

when the acceleration induced by the background gravitational field is large enough to render the two string extremities causally disconnected, because of the Rindler horizon associated with their relative acceleration. This critical acceleration a_c is determined by the string size λ and is given by $a_c = \lambda^{-1} = (m\alpha')^{-1}$ where m is the string mass and α'^{-1} the usual string tension.

In the above cases, the critical acceleration arises as a dynamical effect due to the interplay of the Rindler horizon with the finite extension of the string; in Caianiello's proposal the maximal proper acceleration is a basic physical property of all the particles, so that it must be included in the physical laws from the outset and implies a modification of the metric structure of space-time.

Caianiello's model has been applied to cosmology with an early dominance of extended particles [15], where it regularizes a given cosmological metric by avoiding the occurrence of curvatures and densities larger than the Planck ones, and, moreover, it has been shown to give the same results as "string dilaton cosmology", interpreting the dilaton as an acceleration field [16]. The starting point in the last case was the hypothesis that the acceleration is a function of the scalar field; this hypothesis can be understood in the light of Bohm's interpretation of Quantum Mechanics.

The simplest theoretical framework which includes maximal proper acceleration, consists of considering as physical invariant, not the einsteinian four dimensional space time distance element, but a new one, more general, defined in an eight dimensional space-time tangent bundle TM , whose coordinates are [17]:

$$x^A = \left(x^\mu, \frac{\hbar}{mc} \dot{x}^\mu \right)$$

where m is the rest mass of the particle, $x^\mu = (ct, \vec{x})$ is the usual space-time four-vector, and $\dot{x}^\mu = dx^\mu/ds$ are the relativistic four-velocity coordinates in the four-velocity fiber manifold. (Conventions: $A, B, \dots = 0, 1, 2, \dots, 7$; $\mu, \nu, \dots = 0, 1, \dots, 3$; from now on we will use natural units $\hbar = c = 1$).

In TM , the infinitesimal element of distance is

$$d\tilde{s}^2 = g_{AB} dx^A dx^B = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{1}{m^2} g_{\mu\nu} d\dot{x}^\mu d\dot{x}^\nu. \quad (1)$$

thus introducing an upper limit on the proper acceleration which depends on the rest mass of the particle $a_{\max} = m$.

The construction of the dynamic laws can be realized either defining a suitable action in the eight-dimensional space-time tangent bundle TM [3, 4, 9], or by an embedding procedure [18], the first step of a process of successive approximations, to obtain an effective four-dimensional space-time geometry. The embedding procedure constructs an effective new space-time metric $\tilde{g}_{\mu\nu}(\xi)$, through the eight parametric equations $x^A = x^A(\xi^\mu)$ that correlate the coordinates x^A of TM to the coordinates ξ^μ chosen to parametrize the four-dimensional space-time manifold V_4 :

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\xi) = g_{AB} \frac{\partial x^A}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial x^B}{\partial \xi^\nu} = g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\nu} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial \dot{x}^\beta}{\partial \xi^\nu} \right) \quad (2)$$

The first step approximation introduced by this procedure consists in defining the eight parametric equations $\{x^\mu = x^\mu(\xi^\alpha); \dot{x}^\mu = \dot{x}^\mu(\xi^\alpha)\}$ by the solutions to the ordinary relativistic equations of motion.

The embedding procedure produces corrections to the given background four dimensional geometry, which disappear in the classical limit $m^{-1} \rightarrow 0$; however these corrections induce in general a non vanishing curvature even starting from an eight-dimensional space-time tangent bundle TM with a flat metric.

The maximal acceleration in string theory has been discussed in several contexts [19]; in this paper we report the results concerning the string's rigid motion in the modified Rindler background. The interest of this analysis lies in exploiting the link between the finite extension of the string and the maximal acceleration. In particular, we derive that, for each value of the acceleration, there is a minimal value of the string length measured in the accelerated frame, that can be equal to zero only when the acceleration is maximal. This is an effect analogous to what happens in special relativity, where only particles with null rest mass move at the maximal velocity c ; in maximal acceleration physics, only null length strings, i.e. point particles, can be accelerated to the maximal acceleration.

2 - STRING MOTION IN RINDLER SPACE

Frolov and Sanchez [11] analyzed the dynamics of an uniformly accelerated open string in flat space with masses concentrated at its ends as "heavy" particles coupled to an external force, and proved that rigid

equilibrium configurations of the accelerated string (moving as a rigid body without any excitation) exist only for an acceleration less than the critical one, beyond which the string begins to grow indefinitely.

They used the classical Rindler metric

$$ds^2 = -\xi^2 d\eta^2 + d\xi^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3)$$

(where the Rindler coordinates $\xi = 1/a$, $\eta = as$, and a is the acceleration) but in order to quantize the string properly, De Vega and Sanchez [20] were compelled to introduce an infinitesimal parameter ϵ (of the order of the Planck length) as regularization of the Rindler horizon to avoid ultra-violet divergences in the free energy and entropy of quantum fields.

Applying the embedding procedure to the case of Rindler space, we obtain the modified Rindler metric [18]

$$d\tau^2 = -\left(\xi^2 - \frac{1}{m^2}\right) d\eta^2 + d\xi^2 + dy^2 + dz^2 \quad (4)$$

which defines a geometry of a curved manifold with scalar curvature

$$R = \frac{2m^2}{(m^2\xi^2 - 1)^2} \quad (5)$$

If we choose the parameter m equal to the Planck mass m_p , we have the same regularization of the Rindler horizon introduced “ad hoc” by De Vega and Sanchez. Hence the metric (4) seems the right background to study the behaviour of the uniformly accelerated string and, as explicitly pointed out in [21], the maximal acceleration plays the role of a physical cut-off preventing divergences.

We consider an open string with massive ends (e.g. monopoles [22]), numbered with the indices 1 and 2, on which some external force is applied in such a way that both particles are moving with the same constant proper acceleration $a = g$.

In an inertial frame of reference the coordinates (t, x, y, z) are chosen in such a way that the x -axis coincides with the direction of acceleration, while the y -axis is parallel to the distance L between the ends of the string; correspondingly, the Rindler coordinates are (η, ξ, y, z) and in the accelerated Rindler frame the particles at the string ends obey the boundary conditions:

$$\xi_1 = \xi_2 = g^{-1}; \quad y_1 = -y_2 = L/2; \quad z_1 = z_2 = 0 \quad (6)$$

The string action in a curved manifold is given by [20]:

$$S = \int \int d\sigma d\tau \sqrt{\Lambda} \Lambda^{\alpha\beta} \tilde{g}_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \quad (7)$$

where the string tension has been normalized to one, $\Lambda_{\alpha\beta}$ is the world-sheet metric, $\tilde{g}_{\mu\nu}$ is the metric of the curved Rindler manifold, and τ and σ are the world-sheet time and space variables. As it is well known, this action is invariant under reparametrization of the world-sheet coordinates, and this allows us to choose $\Lambda_{\alpha\beta}$ in the so called conformal form

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda(\sigma, \tau) \eta_{\alpha\beta}$$

Working in the conformal gauge, from the action (7) one derives the following equation of motion of the string:

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu + \Gamma_{\nu\delta}^\mu (\dot{x}^\nu + x'^\nu)(\dot{x}^\delta - x'^\delta) = 0 \quad (8)$$

and the constraint equations:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + x'^\mu x'^\nu) = 0 \quad \tilde{g}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu x'^\nu = 0 \quad (9)$$

where $\dot{x}^\mu = \partial x^\mu / \partial \tau$, $x'^\mu = \partial x^\mu / \partial \sigma$, and $\Gamma_{\nu\delta}^\mu$ are the Christoffel connections of the metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

In the curved Rindler metric (4), the equations (8) and (9) become:

$$\ddot{\eta} - \eta'' + \frac{2m^2\xi}{m^2\xi^2 - 1} (\dot{\xi}\dot{\eta} - \xi'\eta') = 0 \quad (10)$$

$$\ddot{\xi} - \xi'' + \xi(\dot{\eta}^2 - \eta'^2) = 0 \quad (11)$$

$$\ddot{y} - y'' = 0 \quad (12)$$

$$-(\xi^2 - m^{-2})(\dot{\eta}^2 + \eta'^2) + (\dot{\xi}^2 + \xi'^2) + (\dot{y}^2 + y'^2) = 0 \quad (13)$$

In [23], a special solution of the equations (10–13) has been obtained, satisfying the boundary conditions (6), and describing an uniformly accelerated string, moving as a rigid body without any excitation; this means that η is a linear function of τ , ξ a function of the only variable σ , and $z(\tau, \sigma) = 0$.

We put $y = L\sigma/\pi$ so that the spatial parameter σ varies from $-\pi/2$ to $\pi/2$. This special solution is :

$$\xi = \sqrt{\frac{L^2}{\pi^2\beta^2} + \frac{1}{m^2}} \cosh\left(\frac{\beta\pi}{L}y\right) \quad (14)$$

where β is a parameter determined by boundary equations. It should be stressed that the obtained particular solution does not exhaust all the possible solutions; more general solutions exist which describe excited strings.

The string configuration, described by the equation (14) does not depend on the Rindler time η and hence the string as a whole is at rest in the Rindler frame; for $m \rightarrow \infty$ (14) reduces to the same solution found by Frolov and Sanchez [11]; moreover, as $\xi = 1/a$, we have

$$a(y) = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{m^2 L^2}{\beta^2 \pi^2}}} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\beta\pi}{L} y\right)} \quad (15)$$

This function has his maximal value in $y = 0$ where the acceleration remains finite also in the limit $L \rightarrow 0$; in this limit $a(0) = m$. With regards to the β parameter, its value is fixed by the boundary condition that the string ends must move with the assigned acceleration g , expressed by the equation:

$$\cosh\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) = \frac{m}{g} \left(1 + \frac{m^2 L^2}{\beta^2 \pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (16)$$

For different values of the acceleration g , this equation admits two, one, or no solution (Fig. 1 and 2).

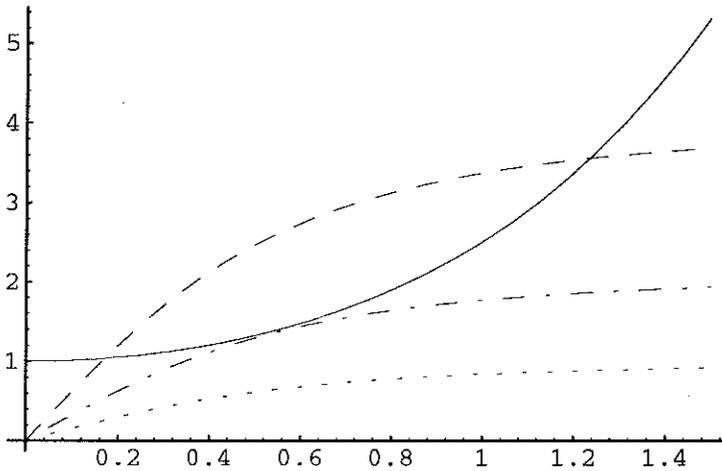


Fig 1: plots of the functions $y_1 = \cosh\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)$ (solid line) and $y_2 = \frac{m}{g} \left(1 + \frac{m^2 L^2}{\beta^2 \pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ for $L = 2m^{-1}$ and for $g = 0.25m$ (dashed line), $g = 0.476m$ (dot-dashed line), and for $g = m$ (dotted line).

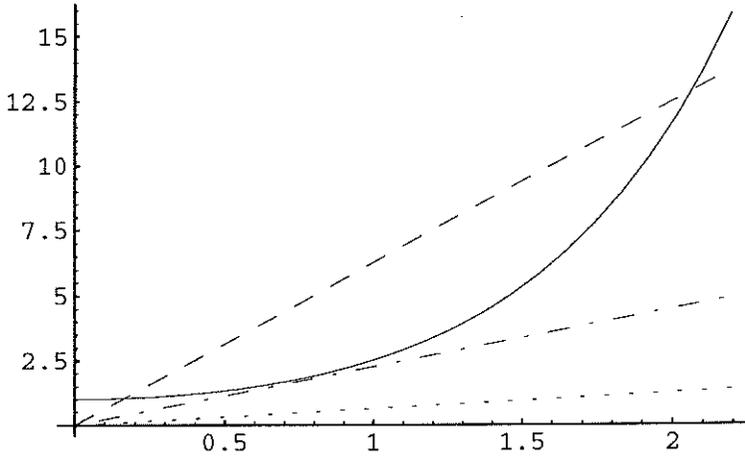


Fig 2: plots of the functions $y_1 = \cosh\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)$ (solid line) and $y_2 = \frac{m}{g} \left(1 + \frac{m^2 L^2}{\beta^2 \pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ for $L = 50m^{-1}$ and for $g = 0.01m$ (dashed line), $g = 0.0278m$ (dot-dashed line), and for $g = 0.1m$ (dotted line).

In particular, for each value L , we have a corresponding critical value of the string acceleration a_c , above which there is no solution β to eq. (16), and viceversa for each value of the acceleration g , there is a maximal value L_{max} above which again eq. (16) does not admit solution. Let us note, moreover, that for $L \neq 0$ the critical proper acceleration of the string is always less than the maximal value m .

The calculation of the string size l in the Rindler frame [23] gives:

$$l = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \sqrt{1 + \left(1 + \frac{\beta^2 \pi^2}{m^2 L^2}\right) \sinh^2\left(\frac{\beta\pi}{L} y\right)} = 2\sqrt{\frac{L^2}{\beta^2 \pi^2} + \frac{1}{m^2}} \cdot \left[wF(v, \sqrt{1-w}) - E(v, \sqrt{1-w}) + \frac{\sinh \beta\pi}{2\sqrt{w + \sinh^2 \frac{\beta\pi}{2}}} \right] \quad (17)$$

where

$$v = \arctan\left(\sinh \frac{\beta\pi}{2}\right)^{-1}, \quad w = \frac{m^2 L^2}{\pi^2 \beta^2 + m^2 L^2}$$

and F , E are the elliptic integrals of the first and second kind respectively. In the limit $m \rightarrow \infty$ we recover the result by Frolov and Sanchez [11]:

$$\tilde{l} = \frac{2L}{\beta\pi} \sinh\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)$$

which goes to $2/g$ if $L \rightarrow 0$. On the contrary, if a maximal acceleration exists, the limit $L \rightarrow 0$ leads to:

$$l = \frac{2}{m} \sinh\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \tanh\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)$$

with

$$\beta = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcosh}\left(\frac{m}{g}\right)$$

from (16). Therefore

$$l = \frac{2}{g} \left(1 - \frac{g^2}{m^2}\right) \quad (18)$$

and eq. (18) shows that l becomes zero only for $g = m$.

3 - CONCLUSIONS

It has been shown that the equilibrium configuration of a uniformly accelerated string can exist only if the acceleration of the string massive ends is less than a critical value a_c . For $g < a_c$ there exist two equilibrium configurations while for $g > a_c$ the equilibrium configurations are impossible. Let us note that the acceleration of the different points of the string is a function of the y -coordinate, as shown in eq. (15), and the maximal value of this function is assumed in $y = 0$. In the classical flat Rindler metric, this maximal value of the acceleration can diverge, as it happens in the limit $L \rightarrow 0$; in our modified curved Rindler metric, the value of the acceleration in any string point can never diverge, so that it can be used as a natural cut-off to define a finite entropy for Rindler space without introducing the cut-off by hands as in [17, 20, 24].

The string proper size in the Rindler frame is always greater than a minimal length, which is function of the proper acceleration g ; this minimal length goes to zero only when g reaches its maximal value m . As in classical relativity only particles with zero mass can move at the maximal velocity c , so in this theory with maximal proper acceleration only point particles ($l = 0$) can move at maximal acceleration m .

REFERENCES

1. E.R. Caianiello: *Lett. Nuovo Cimento*, **32**, 65, (1981)
E.R. Caianiello, S. de Filippo, G. Marmo, G. Vilasi: *Lett. Nuovo Cimento*, **34**, 112, (1982)
2. E.R. Caianiello: *La rivista del Nuovo Cimento*, **15** n.4 (1992) and references therein.
3. E.R. Caianiello: *Lett. Nuovo Cimento* **25**, 225 (1979); **27**, 89 (1980); *Il Nuovo Cimento* **59B**, 350 (1980)
4. E.R. Caianiello, G. Marmo, G. Scarpetta: *Il Nuovo Cimento*, **86A**, 337, (1985)
5. E.R. Caianiello: *Lett. Nuovo Cimento*, **41**, 370, (1984);
W.R. Wood, G. Papini and Y.Q. Cai: *Il Nuovo Cimento* **104B**, 361 and (errata corrige) 727 (1989)
6. W.R. Wood, G. Papini, Y.Q. Cai: *Il Nuovo Cimento*, **104B**, 653, (1989);
G. Papini, W.R. Wood: *Phys. Lett.*, **170A**, 409, (1992);
G. Papini: *Mathematica Japonica*, **41**, 81 (1995)
7. B. Mashoon: *Physics Letters*, **143A**, 176 (1990) and references therein
8. M. Toller: *Nuovo Cimento* **102B**, 261 (1988); *Int. J. Theor. Phys.* **29**, 963 (1990); *Phys. Lett.* **256B**, 215 (1991)
9. H.E. Brandt: *Lett. Nuovo Cimento* **38**, 522 (1983) and (errata corrige) **39**, 192 (1984); *Found. Phys. Lett.* **2**, 39 (1989) and references therein
10. A. Das: *J. Math. Phys.*, **21**, 1506, (1980)
11. V.P. Frolov, N. Sanchez: *Nucl. Phys.*, **349B**, 815, (1991)
12. C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler: "Gravitation" (W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973), chapt. 6
13. N. Sanchez and G. Veneziano: *Nucl. Phys.*, **333B**, 253, (1990);
M. Gasperini, N. Sanchez, G. Veneziano: *Nucl. Phys.*, **36B**, 365, (1991);
M. Gasperini, N. Sanchez, G. Veneziano: *Int. J. Mod. Phys.*, **6A**, 3853, (1991).

14. M. Gasperini: *Phys. Lett.*, **258B**, 70, (1991); *Gen. Rel. Grav.*, **24**, 219, (1992).
15. E.R.Caianiello, M.Gasperini, G.Scarpetta: *Class. Quantum Grav.*, **8**, 659 (1991).
M. Gasperini: in "Advances in Theoretical Physics" ed. E.R. Caianiello, (World Scientific, Singapore, 1991), p. 77
16. S.Capozziello, R.De Ritis, A.Feoli: *Int. J. Mod. Phys.*, **4D**, 259 (1995)
17. G. Scarpetta: *Lett. Nuovo Cimento*, **41**, 51, (1984)
18. E.R. Caianiello, A. Feoli, M. Gasperini, G. Scarpetta: *Int. Journal of Theoretical Physics*, **29**, 131, (1990);
E.R. Caianiello, M. Gasperini, G. Scarpetta: *Il Nuovo Cimento*, **105B**, 259, (1990);
A. Feoli and G. Scarpetta: in "Advances in Theoretical Physics" ed. E.R. Caianiello, (World Scientific, Singapore, 1991), p. 68
19. N.Sanchez: in "Structure: from Physics to General Systems" Ed.s M. Marinaro and G. Scarpetta, (World Scientific, Singapore, 1992) vol.1, p.94;
N.Sakai: in "Particles and Nuclei: Essays in Honor of the 60th Birthday of Yoshio Yamaguchi" ed. Terazawa (World Scientific, Singapore, 1987) p.286;
R.Parentani and R.Potting: *Phys. Rev. Lett.* **63**, 945 (1989).
20. N.Sanchez: *Phys. Lett.*, **195B**, 160 (1987);
H.J. De Vega, N. Sanchez: *Nucl. Phys.*, **299B**, 818, (1988)
21. A.Feoli: Ph.D. Thesis (Salerno, 1993) chapt.4
22. A. Vilenkin: *Phys. Rep.*, **121**, 263, (1985)
23. A. Feoli: *Nucl. Phys.* **396B**, 261 (1993)
24. M. McGuigan: *Phys. Rev.*, **50D**, 5225, (1994)

Potenziale interquark nei modelli di stringa ¹

Nota di Gaetano Lambiase²

Presentata dal Socio Gaetano Scarpetta
(Adunanza del 9 novembre, 1996)

Key words :: string theory, hadronic physics

Abstract - A consistent method for calculating the interquark potential generated by a relativistic Nambu-Goto string with point-like masses at his ends is proposed. At first the calculation is done in one-loop approximation. For obtaining a finite result under summation over eigenfrequencies of string with massive ends, an appropriate renormalization procedure is suggested. It follows that the universal Lüscher term in the string potential depends on quark mass. Then the interquark potential is calculated by making use of the variational estimation of the corresponding functional integral. In this case the quark mass corrections give rise to decreasing critical distance (deconfinement radius) in the string potential.

Riassunto - Si propone un metodo consistente per calcolare il potenziale interquark generato da una stringa relativistica del tipo Nambu-Goto con masse puntiformi poste alle sue estremità. Dapprima il calcolo è fatto perturbativamente nell'approssimazione ad un loop. Per ottenere risultati finiti sommando sulle autofrequenze di stringhe con estremi massivi, si suggerisce una nuova procedura di rinormalizzazione. Ne consegue che il termine universale di Lüscher nel potenziale di stringa acquista una dipendenza dalla massa dei quark. Si calcola poi il potenziale interquark mediante il metodo variazionale applicato al corrispondente integrale funzionale. In questo caso le correzioni dovute alla massa dei quarks danno origine ad una distanza critica decrescente (raggio di deconfinamento) nel potenziale di stringa.

¹Ricerca effettuata con fondi MURST 40% e 60%

²Dipartimento di Scienze Fisiche "Eduardo R. Caianiello", Università di Salerno, 84081 Baronissi (Sa), Italy.

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare. Sezione Napoli.

1-INTRODUZIONE

La più promettente teoria per la descrizione della fisica delle particelle adroniche, particelle cioè che interagiscono fortemente, è senza dubbio la Quantum Chromodynamics (QCD) [1-3]. In questa teoria, gli oggetti fondamentali sono rappresentati dai quark i quali interagiscono mediante bosoni di gauge massless, i gluoni. Gli adroni, che si suddividono in due grandi sottofamiglie, i mesoni (spin intero) e barioni (spin semi-intero), risultano essere stati legati di quark; più specificatamente, i mesoni sono stati legati di coppie quark-antiquark, mentre i barioni sono stati legati di tre quark.

La QCD è capace di spiegare alcune peculiarità fondamentali del comportamento dei quark all'interno degli adroni. A brevi distanze, cioè per distanze piccole rispetto alle dimensioni tipiche degli adroni, $10^{-15} m$, i quark si comportano come particelle libere; questa proprietà è nota come libertà asintotica. Per distanze dell'ordine delle dimensioni adroniche, può accadere invece che dal punto di vista energetico sono favorite quelle configurazioni di campo gluonico distribuite non in tutto lo spazio (come avviene in elettrodinamica quantistica per i fotoni), ma piuttosto lungo la linea congiungente i quark. Ne consegue che l'energia dei quark accoppiati dal "tubo" di campo gluonico viene ad essere proporzionale alla distanza tra essi, e quindi quark e gluoni restano confinati all'interno degli adroni (confinamento dei quark) [4-7].

I quark connessi dal tubo di flusso di campo gluonico hanno una strettissima analogia, come evidenziato in Ref. [8], con una stringa ai cui estremi sono collocate delle masse puntiformi. In questa analogia l'idea sottostante è sostanzialmente la seguente: le configurazioni di campo gluonico localizzate lungo la linea congiungente i quark sono simulate da una stringa relativistica con estremità massive, quest'ultime rappresentanti i quark. La stringa dotata di estremi massivi determina la dinamica di base del modello di stringhe nel contesto della fisica adronica e riproduce i risultati fondamentali ottenuti in QCD [9, 10]. In particolare, una stringa relativistica che connette due particelle massive determina in modo naturale un potenziale tra essi linearmente crescente con la distanza, in accordo con l'ipotesi del confinamento.

L'interazione tra quark nei modelli di stringhe [11-19] è sempre stata analizzata considerando potenziali interquark statici, in altre parole, assumendo che i quark siano infinitamente pesanti. Ovviamente, per definizione, questo potenziale non dipende dalla massa dei quark.

L'assunzione di quarks infinitamente pesanti è però piuttosto cruda almeno per i quarks *up* e *down*, poiché quest'ultimi hanno masse dell'ordine di 200–300 MeV, significativamente più piccole rispetto alla scala di massa adronica caratteristica ~ 1 GeV. Quindi è abbastanza naturale aspettarsi una dipendenza del potenziale interquark dalla massa dei quark, e d'altra parte, questa conclusione è avvalorata dai risultati ottenuti mediante simulazioni numeriche su reticolo [20-22] e nell'ambito della QCD stessa [23].

L'intento di questa nota è di estendere il metodo standard per il calcolo del potenziale interquark generato da una stringa al caso in cui le masse dei quark siano finite. A tal fine, considereremo come modello di stringa quello di Nambu-Goto [24].

2-APPROSSIMAZIONE QUADRATICA

L'azione di una stringa relativistica, come è ben noto, è proporzionale all'area della superficie di mondo spazzata dalla stringa quando essa evolve nello spazio tempo. Assumeremo che lo spazio-tempo sia Minkowskiano, D -dimensionale e con segnatura $(+, -, \dots, -)$. A questa azione va aggiunta l'azione per le particelle massive puntiformi di massa m_a ($a = 1, 2$) poste agli estremi della stringa. Quindi l'azione totale per una stringa con estremità massive è data da [8]

$$S = -M_0^2 \iint_{\Sigma} d\Sigma - \sum_{a=1}^2 m_a \int_{C_a} ds_a, \quad (2.1)$$

dove $d\Sigma$ è l'elemento di area infinitesimo della superficie di mondo della stringa. C_a ($a = 1, 2$) sono le linee di mondo degli estremi massivi della stringa e M_0^2 è la tensione della stringa con dimensioni $[\text{massa}]^2$ ($\hbar = c = 1$). Usando la parametrizzazione di Gauss per la superficie di mondo, si ha

$$x^\mu(\xi) = (t, r; x^1(t, r), \dots, x^{D-2}(t, r)) = (\xi^i; u(\xi^i)), \quad i = 0, 1. \quad (2.2)$$

Il campo vettore $u^j(t, r)$, $j = 1, \dots, D - 2$ corrisponde alle $D - 2$ componenti trasverse di x^μ , mentre $t = \xi^0$, $r = \xi^1$ sono le coordinate sulla superficie di mondo. L'elemento d'area infinitesimo $d\Sigma$ è dato da $d\Sigma = \sqrt{-g} dt dr$, dove g è il determinante della metrica indotta sulla superficie di mondo. $g_{ij} = \partial_i x^\mu \partial_j x_\mu$, $i, j = 0, 1$. In questa parametrizzazione, la

metrica indotta ha le seguenti componenti

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \dot{u}^2 & -\dot{u}u' \\ -\dot{u}u' & -1 - u'^2 \end{pmatrix}, \quad i, j = 0, 1, \quad (2.3)$$

in cui $uu = \sum_{j=1}^{D-2} u^j u^j$ e $u_0 = \partial u / \partial t = \dot{u}$, $u_1 = \partial u / \partial r = u'$.

Avendo in mente di usare lo sviluppo perturbativo per il calcolo del potenziale, conviene lavorare nell'approssimazione quadratica, assumendo cioè piccole le variazioni delle componenti $u(t, r)$ rispetto alla lunghezza della stringa R . In questa approssimazione l'azione di stringa (2.1) diventa al secondo ordine in u

$$\begin{aligned} S \simeq & -M_0^2 (t_2 - t_1) R + \frac{M_0^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^R dr [\dot{u}^2(t, r) - u'^2(t, r)] - \\ & - (t_2 - t_1) \sum_{a=1}^2 m_a + \sum_{a=1}^2 \frac{m_a}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{u}^2(t, r_a), \quad (2.4) \\ & r_1 = 0, \quad r_2 = R. \end{aligned}$$

Variazioni dell'azione (2.4) rispetto alle coordinate di stringa u portano alle equazioni del moto

$$\square u = 0 \quad (2.5)$$

e alle condizioni al contorno

$$m \ddot{u} = M_0^2 u', \quad r = 0, \quad (2.6)$$

$$m \ddot{u} = -M_0^2 u', \quad r = R, \quad (2.7)$$

dove $\square = \partial^2 / \partial t^2 - \partial^2 / \partial r^2$ ed abbiamo assunto per semplicità $m_1 = m_2 = m$. Il risultato per masse arbitrarie sarà discusso in seguito (cf. Ref. [25]).

La soluzione generale alle Eqs. (2.5)-(2.7) è del tipo

$$u^j(t, r) = \frac{1}{\sqrt{2} M_0} \sum_{n \neq 0} \exp[-i\omega_n t] \frac{\alpha_n^j}{\omega_n} u_n(r), \quad j = 1, 2, \dots, D-2, \quad (2.8)$$

dove le ampiezze α_n soddisfano le usuali regole di coniugazione complessa, $\alpha_n^* = \alpha_{-n}$. Le autofunzioni $u_n(r)$ nella (2.8) sono definite da

$$u_n(r) = N_n \left[\cos(\omega_n r) - \frac{m\omega_n}{M_0^2} \sin(\omega_n r) \right], \quad (2.9)$$

con N_n costanti di normalizzazione. Le autofrequenze ω_n sono le radici dell'equazione trigonometrica

$$\tan(\omega R) = \frac{2mM_0^2\omega}{m^2\omega^2 - M_0^4}. \quad (2.10)$$

Sull'asse ω queste radici sono poste simmetricamente intorno allo zero, quindi possono essere numerate nel seguente modo: $\omega_{-n} = -\omega_n$, $n = 1, 2, \dots$. Pertanto sarà sufficiente considerare solo le radici positive.

La densità del momento canonico è definita nell'usuale modo

$$p^j(t, r) = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^j} = M_0^2 \dot{u}^j(t, r) \varepsilon(r), \quad (2.11)$$

in cui L è la Lagrangiana nella azione (2.4) e $\varepsilon(r) = 1 + (m/M_0)[\delta(r) + \delta(R-r)]$. L'Hamiltoniana canonica è data da

$$H = \int_0^R dr [p(t, r) \dot{u}(t, r) - L] = \frac{M_0^2}{2} \int_0^R dr [\dot{u}^2(t, r) \varepsilon(r) + u'^2(t, r)], \quad (2.12)$$

che in termini delle ampiezze α_n^j diventa

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{D-2} (\alpha_n^j \alpha_n^{j+} + \alpha_n^{j+} \alpha_n^j). \quad (2.13)$$

Nella teoria quantistica, $u^j(t, r)$ e il suo momento coniugato $p^j(t, r)$ diventano operatori che soddisfano le usuali regole di commutazione canoniche. Questo implica che anche le ampiezze diventano operatori e soddisfano le relazioni di commutazione

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = \omega_n \delta^{ij} \delta_{n+m, 0}, \quad (2.14)$$

$$i, j = 1, \dots, D-2, \quad n, m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Introducendo gli operatori di creazione e distruzione nello spazio di Fock. a_n^+ e a_n rispettivamente, definiti come

$$\alpha_n^j = \sqrt{\omega_n} a_n^j, \quad \alpha_n^{j+} = \sqrt{\omega_n} a_n^{j+}, \quad (2.15)$$

$$[a_n^i, a_m^{j+}] = \delta^{ij} \delta_{nm}, \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad (2.16)$$

l'Hamiltoniana (2.13) prende la forma

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{D-2} \omega_n a_n^{j+} a_n^j + \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n. \quad (2.17)$$

L'ultimo termine nella (2.17) rappresenta l'energia di Casimir che, come in tutti gli analoghi problemi, porta a divergenze nella teoria [26]. Per eliminare tali divergenze ed ottenere valori fisicamente accettabili per l'energia di Casimir, una (nuova) procedura di rinormalizzazione sarà proposta, come vedremo nella prossima sezione.

3-CALCOLO PERTURBATIVO DEL POTENZIALE DI STRINGA

Calcoliamo ora il potenziale interquark generato da una stringa con estremità massive nell'approssimazione one-loop della teoria perturbativa per arbitrarie dimensioni dello spazio-tempo D . Il potenziale di stringa $V(R)$ è definito in termini dell'integrale funzionale come [11, 17-19]

$$\exp[-\beta V(R)] = \int [Du] \exp\{-S^\beta[u]\}, \quad \beta \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

dove β è l'inverso della temperatura e $S^\beta[u]$ è l'azione Euclidea (2.1) calcolata per l'intervallo di "tempo" finito $0 \leq t < \beta$. Inoltre, la variabile dinamica $u(t, r)$ soddisfa le condizioni di periodicità

$$u(t, r) = u(t + \beta, r).$$

Il calcolo del potenziale interquark nell'approssimazione a one-loop si esegue considerando nell'azione Euclidea (2.1) solo i termini quadratici in $u(t, r)$. In analogia alla (2.4) si ha

$$S_0^\beta = M_0^2 \beta R + \frac{M_0^2}{2} \int_0^\beta dt \int_0^R dr [\dot{u}^2(t, r) + u'^2(t, r)] + \beta \sum_{a=1}^2 m_a + \quad (3.3)$$

$$+ \sum_{a=1}^2 \frac{m_a}{2} \int_0^\beta dt \dot{u}^2(t, r_a), \quad r_1 = 0, \quad r_2 = R,$$

e le corrispondenti equazioni del moto e condizioni al contorno sono date dalle seguenti equazioni

$$\Delta u = 0, \quad (3.4)$$

$$m\ddot{u} = -M_0^2 u', \quad (3.5)$$

$$m\ddot{u} = M_0^2 u', \quad (3.6)$$

dove $\Delta = \partial^2/\partial t^2 + \partial^2/\partial r^2$ (Laplaciano bi-dimensionale).

L'integrale funzionale è fatto sulle variabili dinamiche $u(t, r)$ che soddisfano le condizioni (3.2), (3.5) e (3.6). In questo caso, dopo un'integrazione per parti, l'azione (3.3) può essere riscritta nelle seguente forma

$$S_0^\beta = M_0^2 \beta R + 2m\beta + \frac{M_0^2}{2} \int_0^\beta dt \int_0^R dr u(t, r) (-\Delta) u(t, r), \quad (3.7)$$

dove, imponendo le condizioni al contorno (3.5) e (3.6) sulle funzione $u(t, r)$, i contributi all'azione S_0^β dovuti alle masse puntiformi agli estremi delle stringhe sono stati rimossi. Gli effetti di queste masse si manifestano attraverso le condizioni al contorno (3.5) e (3.6), e attraverso le autofrequenze di stringa (cf. Eq. (2.10)). L'integrazione funzionale (2.1) con S_0^β data dalla (3.7) porta al risultato

$$V(R) = M_0^2 R + 2m + \frac{D-2}{2\beta} Tr \ln(-\Delta), \quad \beta \rightarrow \infty, \quad (3.8)$$

Nel derivare la (3.8) sono state considerate tutte le variabili di campo $u^j(t, r)$, $j = 1, 2, \dots, D-2$, pertanto l'operatore $(-\Delta)$ agirà su tali funzioni scalari obbedienti alle condizioni di periodicità (3.2) e quelle al contorno (3.5) e (3.6).

Per calcolare la traccia funzionale nella (3.8) è necessario conoscere gli autovalori dell'operatore $(-\Delta)$

$$-\Delta \varphi_{nm} = \lambda_{nm} \varphi_{nm}. \quad (3.9)$$

L'autofunzione $\varphi_{nm}(t, r)$ deve soddisfare le Eqs. (3.2), (3.5) e (3.6), che grazie alle equazione del moto (3.4) possono essere riscritte nella forma (in tal modo il problema agli autovalori è semplificato)

$$mu'' = M_0^2 u', \quad r = 0; \quad mu'' = -M_0^2 u', \quad r = R. \quad (3.10)$$

Le autofunzioni dell'operatore $(-\Delta)$ che soddisfano le condizioni (3.2) e (3.10) hanno la forma

$$\varphi_{nm}(t, r) = e^{i\Omega_n t} u_m(r), \quad (3.11)$$

dove $\Omega_n = 2\pi n/\beta$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ sono le frequenze di Matsubara e $u_m(r)$, $m = 1, 2, \dots$ sono definite dalle (2.9) e (2.10). Con la sostituzione della (3.11) nella (3.9) si perviene al risultato

$$\lambda_{nm} = \Omega_n^2 + \omega_m^2, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

e la traccia funzionale nella (3.8) può essere così calcolata [28, 29]

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln(-\Delta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \ln \left[\left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + \omega_m^2 \right] = \\ &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\beta \omega_m}{2} + \ln(1 - e^{-\beta \omega_m}) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ritornando alla (3.8) e prendendo il limite per $\beta \rightarrow \infty$ l'espressione finale per il potenziale $V(R)$ diventa

$$V(R) = M_0^2 R + 2m + \frac{D-2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m, \quad (3.14)$$

in cui ritroviamo, come prima correzione quantistica al potenziale di stringa, l'energia di Casimir per una stringa con date condizioni al contorno

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k. \quad (3.15)$$

Come già detto, la somma sulle autofrequenze di stringa diverge. Risultati fisicamente finiti per la (3.15) sono ottenuti mediante una nuova procedura di rinormalizzazione che ora mostreremo.

Cominciamo con l'osservare che l'energia di Casimir è una funzione della massa dei quark, $E_C(m)$, e per i due valori limiti $m = \infty$ (quark immobili) e $m = 0$ (estremi liberi della stringa) essa può essere facilmente calcolata mediante la regolarizzazione della funzione zeta di Riemann, $\zeta(z)$. Infatti, quando $m = \infty$ o $m = 0$, le frequenze di stringa sono date da $\omega_n = n\pi/R$, $n = 1, 2, \dots$ e la corrispondente energia di Casimir è

$$E_C(m = \infty) = E_C(m = 0) = \frac{\pi}{2R} \sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{\pi}{2R} \zeta(-1) = -\frac{\pi}{24R}. \quad (3.16)$$

L'energia di Casimir rinormalizzata per valori finiti di m deve soddisfare queste condizioni al contorno. Tale richiesta determinerà univocamente la procedura di sottrazione degli infiniti nel potenziale.

Per sommare sulle autofrequenze di stringa nella (3.15) usiamo la seguente formula integrale dell'analisi complessa [29]. Si consideri una funzione analitica $f(\omega)$ con zeri di ordine n_k nei punti $\omega = \omega_k$ e con poli

di ordine p_l nei punti $\omega = \tilde{\omega}_l$ in una regione limitata dal contorno C . Dal teorema di Cauchy segue che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C d\omega \omega \frac{f'(\omega)}{f(\omega)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\omega \omega [\ln f(\omega)]' = \sum_k n_k \omega_k - \sum_l p_l \tilde{\omega}_l. \quad (3.17)$$

I poli nella (3.17) possono essere eliminati riscrivendo la (2.10) nella forma

$$f(\omega) = 2mM_0^2 \omega \cos(\omega R) - (m^2 \omega^2 - M_0^4) \sin(\omega R) = 0. \quad (3.18)$$

per cui dalla (3.17) si ottiene

$$E_C(m) = \frac{1}{4\pi i} \oint_C \omega d\omega \frac{d}{d\omega} (\ln f(\omega)), \quad (3.19)$$

dove il contorno C include il semiasse positivo reale dove sono poste le radici della (3.18). Poichè $f(\omega)$ nella (3.18) non ha singolarità nel semipiano destro, il contorno C può essere trasformato nel semicerchio di raggio Λ con il diametro sull'asse immaginario $(-i\Lambda, i\Lambda)$. Per qualsiasi Λ finito, l'integrale (3.19) è finito e quindi può essere trattato come un valore regolarizzato di $E_C^{reg}(m, R)$ (abbiamo inserito l'esplicita dipendenza dell'energia di Casimir dalla lunghezza della stringa R). L'energia di Casimir rinormalizzata sarà ottenuta sottraendo da $E_C^{reg}(m, R)$ il suo valore per $R \rightarrow \infty$ [26, 30]

$$E_C^{ren}(m, R) = E_C^{reg}(m, R) - E_C^{reg}(m, R \rightarrow \infty)|_{\Lambda \rightarrow \infty}. \quad (3.20)$$

Il contributo finito a $E_C^{ren}(m, R)$ deriva solo dall'integrale lungo l'asse immaginario nella (3.19). Sostituendo quindi ω con $i\omega$ e integrando per parti si perviene al risultato cercato: l'energia di Casimir rinormalizzata

$$\begin{aligned} E_C^{ren}(m, R) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dy \ln \left\{ 1 - e^{-2Ry} \left(\frac{my - M_0^2}{my + M_0^2} \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int_0^\infty dx \ln \left\{ 1 - e^{-2x} \left(\frac{x - q}{x + q} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

dove è stato calcolato il limite $\Lambda \rightarrow \infty$ e $q = M_0^2 R/m$ è un parametro adimensionale. La sottrazione delle divergenze per $\Lambda \rightarrow \infty$ dei termini

ottenuti dall'integrazione per parti è interpretata come transizione a valori fisici di M_0^2 e m nella (3.14) e, per semplicità, non introdurremo nuove notazioni per i parametri rinormalizzati del modello. È facile verificare che nelle condizioni limite $m = 0$ e $m = \infty$ si ha

$$\begin{aligned} E_C^{ren}(m = 0, R) = E_C^{ren}(m = \infty, R) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dy \ln(1 - e^{-2Ry}) = \quad (3.22) \\ &= -\frac{\pi}{24R}. \end{aligned}$$

In definitiva, la formula finale del potenziale interquark derivato nell'approssimazione one-loop è

$$V(R) = M_0^2 R + (D - 2) E_C^{ren}(m, R), \quad (3.23)$$

dove $E_C^{ren}(m, R)$ è determinata dalla (3.21) e la costante $2m$ è stata soppressa.

Confrontiamo l'espressione ora ottenuta del potenziale interquark con quello generato da una stringa con estremi fissi [11, 31, 32]

$$V^{fixed}(R) = M_0^2 R - \frac{(D - 2)\pi}{24R}. \quad (3.24)$$

L'ultimo termine qui è il termine universale di Lüscher. In Figura 1 è riportata la quantità $\eta(q)$ definita come

$$\eta(q) = \frac{E_C^{ren}(m, R)}{E_C^{ren}(m = \infty, R)} = -\frac{12}{\pi^2} \int_0^\infty dx \ln \left[1 - e^{-2x} \left(\frac{q - x}{q + x} \right)^2 \right]. \quad (3.25)$$

Deviazioni di $\eta(q)$ da 1 caratterizzano i contributi dovute alla masse dei quarks alle prime correzioni quantistiche del potenziale di stringa. Nella regione $q \approx 0.2$, $\eta(q)$ ha un minimo a ≈ 0.2 . Assumendo che la lunghezza della stringa sia dell'ordine della lunghezza Compton del quark, $R \sim m^{-1}$, allora la massima deviazione del termine di Lüscher si ha per quark con masse dell'ordine $\sim 2.2M_0$, cioè per quark sufficientemente pesanti (nei modelli di stringa, $M_0 \sim 0.4$ GeV).

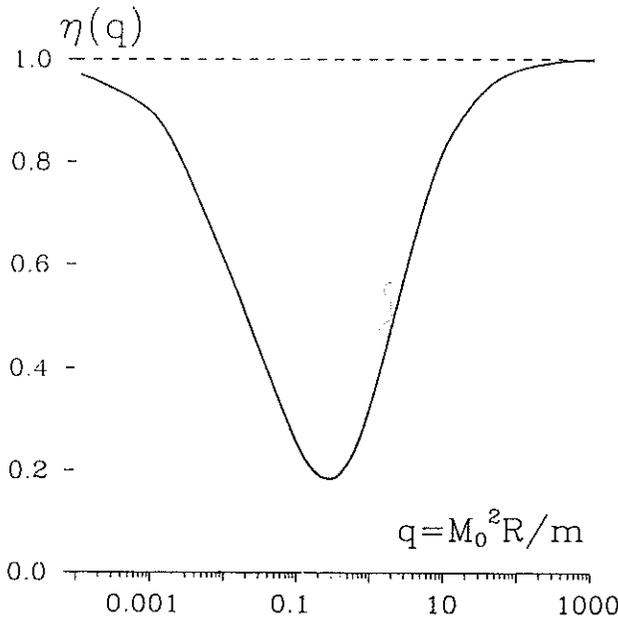


Fig.1: La funzione $\eta(q)$ descrive gli effetti della massa finita dei quark sui valori del termine di Lüscher nel potenziale di stringa.

4-CALCOLO VARIAZIONALE DEL POTENZIALE DI STRINGA

In questa sezione verrà calcolato il potenziale interquark mediante il metodo variazionale dell'integrale funzionale nel limite $D \rightarrow \infty$ [11, 13-18]. Il nostro punto di partenza è ancora una volta la definizione del potenziale di stringa data dalla (3.1)

$$e^{-\beta V(R)} = \int [Du] \exp\{-S^\beta[u]\}, \quad \beta \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

dove S^β è l'azione Euclidea

$$S^\beta[u] = M_0^2 \int_0^\beta dt \int_0^R dr \sqrt{\det(\delta_{ij} + \partial_i u \partial_j u)} + \sum_{a=1}^2 m_a \int_0^\beta dt \sqrt{1 + \dot{u}^2(t, r_a)}, \quad (4.2)$$

$$i, j = 0, 1, \quad r_1 = 0, r_2 = R.$$

L'espansione $1/(D-2)$ é fatta in modo standard [11]. Consideriamo i campi composti σ_{ij} per $\partial_i u \partial_j u$ e il vincolo $\sigma_{ij} = \partial_i u \partial_j u$ attraverso i moltiplicatori di Lagrange α^{ij} . Usando la parametrizzazione esponenziale della funzione δ , con gli integrali funzionali su α^{ij} che variano da $-i\infty$ a $+i\infty$. Eqs. (4.1), (4.2) diventano

$$e^{-\beta V(R)} = \int [Du] [D\alpha] [D\sigma] \exp\{-S^\beta[u, \alpha, \sigma]\}, \quad \beta \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

dove

$$S^\beta[u, \alpha, \sigma] = \frac{M_0^2}{2} \int_0^\beta dt \int_0^R dr \left[2\sqrt{\det(\delta_{ij} + \sigma_{ij})} + \alpha^{ij}(\partial_i u \partial_j u - \sigma_{ij}) \right] + \sum_{a=1}^2 m_a \int_0^\beta dt \sqrt{1 + \dot{u}^2(t, r_a)}, \quad i, j = 0, 1, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = R. \quad (4.4)$$

L'integrazione funzionale sulle variabili di stringa u nella (4.3) può essere fatta esattamente poichè l'azione (4.4) é quadratica in u . Inoltre l'integrale funzionale su α^{ij} e σ_{ij} è calcolato mediante il metodo variazionale e i valori stazionari di queste variabili funzionali sono matrici diagonali costanti, indipendenti cioè da t e r : $\alpha^{ij} = \delta^{ij} \alpha^j$, $\sigma_{ij} = \delta_{ij} \sigma_j$ (non si somma su j) (cf. Ref. [11]).

Variazioni dell'azione (4.4) rispetto alle coordinate di stringa determinano le equazioni del moto e le condizioni al contorno

$$\Delta_\alpha u \equiv \alpha^0 \ddot{u} + \alpha^1 u'' = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1 + \sigma_0}} \ddot{u} = -M_0^2 \alpha^1 u', \quad r = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1 + \sigma_0}} \ddot{u} = M_0^2 \alpha^1 u', \quad r = R. \quad (4.7)$$

Integrando per parti il secondo termine della (4.4) e calcolando l'integrale funzionale su $u(t, r)$ otteniamo un contributo del tipo $[(D-2)/2] Tr \ln(-\Delta_\alpha)$. La traccia funzionale è determinata ricorrendo allo stesso metodo usato in Sez. 3

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{D-2}{2\beta} Tr \ln(-\Delta_\alpha) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^1}{\alpha^0}} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k = \sqrt{\frac{\alpha^1}{\alpha^0}} E_C, \quad (4.8)$$

dove $E_C = (1/2) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k$ è l'energia di Casimir per le autofrequenze di stringa soluzioni dell'equazione

$$\tan(\omega R) = \frac{2m\bar{M}_0^2\omega}{m^2\omega^2 - \bar{M}_0^2},$$

con $\bar{M}_0^2 = \alpha^0 \sqrt{1 + \sigma_0} M_0^2$. Quindi l'azione effettiva risulta essere

$$S^\beta = M_0^2 \beta R \left\{ \sqrt{(1 + \sigma_0)(1 + \sigma_1)} - \frac{1}{2} (\alpha^0 \sigma_0 + \alpha^1 \sigma_1) \right\} + \quad (4.9)$$

$$+ \beta(D-2) \sqrt{\frac{\alpha^1}{\alpha^0}} E_C.$$

Eguagliando a zero le variazioni della (4.9) rispetto alle variabili funzionali α^i , σ_i , $i = 0, 1$ si perviene ad un set di equazioni la cui soluzione, con la richiesta $\alpha^0 = 1$ e $\sigma_0 = 0$, permette di determinare attraverso la (4.9) e (4.1) il potenziale di stringa

$$V(R) = M_0^2 R \sqrt{1 + \frac{2(D-2)}{M_0^2 R} E_C(m, R)}. \quad (4.10)$$

dove $E_C(m, R)$ è l'energia di Casimir rinormalizzata (cf. Eq. (3.21)).

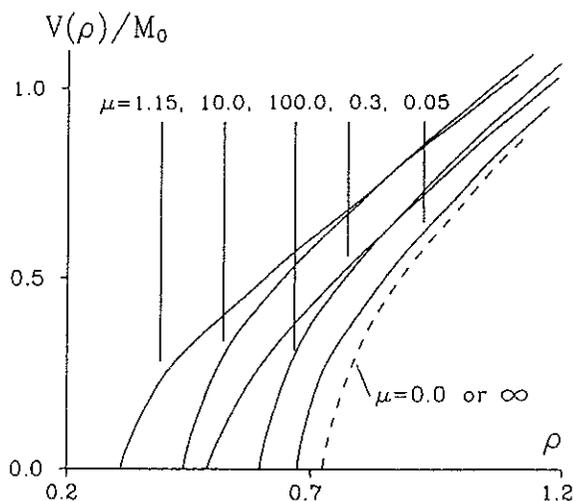


Fig.2: Potenziale interquark $V(\rho)/M_0$ in funzione di $\rho = M_0 R$ per differenti valori di $\mu = m/M_0$. Tutte le curve partono per un dato μ da ρ_c . La curva tratteggiata rappresenta il potenziale interquark generato da una stringa con estremi fissi o liberi (risultato di Alvarez [11]).

In Fig. 2 è stato riportato il potenziale $V(\rho)/M_0$ in funzione della distanza adimensionale $\rho = M_0 R$ per differenti valori di $\mu = m/M_0$.

In Fig. 3 è mostrata la dipendenza del raggio critico $\rho_c = M_0 R_c$ da μ . Per quark infinitamente pesanti il raggio critico è dato da $M_0 R_c = \sqrt{\pi/6} \simeq 0.72$ (per $D = 4$) Notiamo per inciso che valori di $M_0 R$ minori del valore critico 0.72 sono interpretati come stati non fisici del modello (stati tachionici) [8]. Per valori finiti delle masse dei quark il minimo valore ($\simeq 0.31$) di ρ_c si ha per $\mu \simeq 1.15$, e quindi, prendendo come al solito $M_0 \simeq 0.4$ GeV, consegue che $m \simeq 0.5$ GeV.

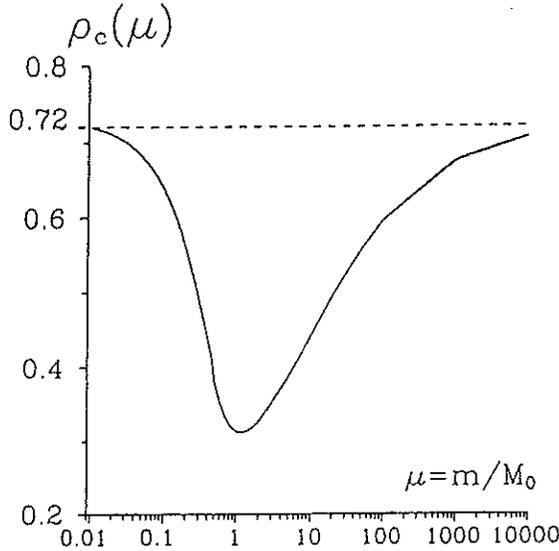


Fig.3: Raggio critico ρ_c in funzione di μ .

Il comportamento del potenziale interquark per differenti masse poste agli estremi della stringa, $m_1 \neq m_2$, è mostrato in Fig. 4. Il risultato interessante che emerge in questo caso é che la singolarità nel potenziale a piccole distanze ($R < R_c$) scompare nel caso in cui agli estremi della stringa sono collocati quark infinitamente pesanti ($m_2 = \infty$) ad un lato e quark infinitamente leggeri ($m_1 = 0$) all'altro. Questo risultato suggerisce che nella configurazione asimmetrica delle masse dei quark, gli stati tachionici possono essere assenti.

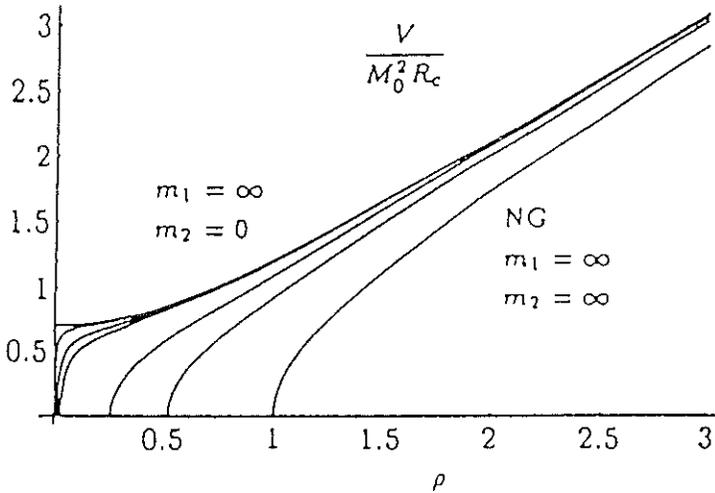


Fig.4: Dipendenza del potenziale interquark dalle condizioni al contorno. La curva superiore mostra il potenziale (4.10) corrispondente condizioni al contorno completamente asimmetriche con l'estremo di una stringa fissato. La curva più bassa rappresenta il risultato di Alvarez per una stringa con estremi liberi o fissi. Le diverse curve corrispondono ai valori di $\mu_2 = m_2/M_0 = 0, 1/5, 1, 2, 10, 100, \infty$.

5-CONCLUSIONI

In questo lavoro è stato mostrato un metodo per calcolare il potenziale interquark generato da una stringa relativistica con masse puntiformi (quark spinless) applicate ai suoi estremi. I risultati ottenuti indicano che le correzioni al potenziale dovute alla massa finita dei quark sono considerevoli sia nell'approssimazione one-loop, sia nella stima variazionale dell'integrale funzionale di stringa. In questi calcoli, solo le vibrazioni trasverse della stringa e i suoi estremi massivi sono stati considerati, mantenendo fissa la lunghezza della stringa, e trascurando i contributi al potenziale dovute alle vibrazioni longitudinali di stringa.

BIBLIOGRAFIA

1. F.J. Yndurain (1993) *Quantum Chromodynamics*, Singapore.
2. W. Marciano and H. Pagels (1978) Phys. Rep. C36, 137.
3. A.H. Mueller (1981) Phys. Rep. C73, 237.
4. Y. Nambu (1976) Scientific Am. 235, 48.
5. M. Bander (1981) Phys. Rep. C75, 205.
6. K.C. Wilson (1974) Phys. Rev. D10, 2445.
7. J. Kogut and L. Susskind (1974) Phys. Rev. D12, 3501.
8. B. M. Barbashov and V. V. Nesterenko (1990) *Introduction to the Relativistic String Theory*, World Scientific, Singapore.
9. I. Bars and A.J. Hanson (1976) Phys. Rev. D13, 1744.
10. I. Bars (1976) Nucl. Phys. B111, 413.
11. O. Alvarez (1981) Phys. Rev. D 24, 440.
12. J. F. Arvis (1985) Phys. Lett. 127B, 106.
13. V. V. Nesterenko (1987) Teor. Mat. Fiz. 71, 238.
14. R. D. Pisarski e O. Alvarez (1992) Phys. Rev. D26, 3735.
15. H. Kleinert (1986) Phys. Lett. B174, 335; (1987) Phys. Rev. Lett. 58, 1915.
16. H. Kleinert (1989) Phys. Rev. D40, 473.
17. G. German e H. Kleinert (1989) Phys. Rev. D40, 1108.
18. G. German (1991) Mod. Phys. Lett. A6, 1815.
19. J. Polchinski e Z. Yang (1992) Phys. Rev. D46, 3667.
20. Kwong J. L. Rosner e C. Quigg (1987) Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 37. 325.

21. D. B. Lichtenberg (1987) *Int. J. Mod. Phys. A2*, 1669.
22. W. Buchmüller (1984) *Fundamental Interaction in Low-Energy System*, ed. F. Dalpiaz, G. Fiorentini e G. Torelli, Plenum, New York, p. 233
23. A. Barchielli, E. Montaldi e G. M. Prospero (1988) *Nucl. Phys. B296*, 625.
24. G. Lambiase e V.V. Nesterenko (1996) *Phys. Rev. D54*, 6387 (1996)
25. H. Kleinert, G. Lambiase e V.V. Nesterenko (1996) *Phys. Lett. B384*, 213.
26. G. Plunien, B. Müller e W. Greiner (1986) *Phys. Rep.* 134, 87.
27. P. Ramond (1981) *Field Theory. A Modern Primer*, The Benjamin Cummings Publishing Company, Massachusetts.
28. S. D. Odintsov (1992) *Rivista del Nuovo Cimento* 15, serie 3, No. 2, 1.
29. E. C. Titchmarsh (1939) *The Theory of Functions*, Oxford University Press. Oxford.
30. I. E. Dzyaloshinskii, E. M. Lifshitz e L. P. Pitaevskii (1961) *Advances in Physics*, 10, No. 38, 165.
31. M. Lüscher, K. Symanzik e P. Weisz (1980) *Nucl. Phys. B173*, 365.
32. M. Lüscher (1981) *Nucl. Phys. B180*, 317.

Ringraziamenti - Desidero ringraziare il prof. G. Scarpetta poiché ha rappresentato un punto di riferimento fondamentale per la mia formazione scientifica. Ringrazio inoltre H. Kleinert e in particolare V.V. Nesterenko con i quali ho collaborato per il raggiungimento dei risultati contenuti in questo lavoro.

On FPT densities of normal processes with an oscillatory covariance¹

Nota di E. Di Nardo², E. Pirozzi³, S. Rinaldi^{4*}

Presentato dal socio Luigi Maria Ricciardi

(Adunanza del 9 Novembre 1996)

Key words: first passage time, double boundaries, simulation.

Abstract - First passage time probability densities through two symmetric constant boundaries are analyzed by using a suitable algorithm for simulating sample paths of stationary normal processes possessing rational spectral densities. A comparison with the analogous results for the standard Wiener process is provided and the effect of covariance's oscillatory components and of the geometry of the boundaries on the shape of FPT densities is pinpointed.

Riassunto - Si fornisce un'analisi della densità del tempo di primo passaggio per coppie di barriere costanti simmetriche utilizzando un algoritmo di simulazione per processi stocastici normali stazionari a densità spettrale razionale. Vengono poi effettuati confronti con i corrispondenti risultati per il processo di Wiener standard e svolte considerazioni circa l'effetto della componente periodica della covarianza e della geometria delle barriere sulle forme delle densità ottenute.

1. INTRODUCTION

The aim of the present paper is to investigate further first passage time problems for normal processes by a simulation procedure early implemented by Buonocore *et al.* [1]. For brevity, we shall refer to [1], [3] and [6] ÷

¹Work supported in part by CNR and by MURST (ex 40% funds).

²Dipartimento di Matematica, Università della Basilicata, Via N. Sauro 85, Potenza, E-mail: dinardo@pvx85.cisit.unibas.it

³Dipartimento di Ingegneria Elettronica e Matematica Applicata, Università di Reggio Calabria, Via Cuzzocrea 48, Reggio Calabria, E-mail: pirozzi@ns.ing.unirc.it

⁴Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli "Federico II", Via Cintia, Napoli, E-mail: rinaldi@matna2.dma.unina.it

* Author to whom correspondence should be addressed.

[8] for the necessary notation and for the justification of the simulation procedure. Here we limit ourselves to an outline of our basic computation results. Further details may be found in Di Nardo *et al.* [4].

By an implementation of the simulation procedure, based on Franklin's algorithm (cf., for instance, [5] and references therein), we construct sample paths of a stationary normal process $X(t)$ with zero mean and covariance function

$$\gamma(t) = E[X(t + \tau)X(\tau)] = \exp(-\beta t) \cos(\alpha t) \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

where α and β are positive parameters. The spectral density of $X(t)$ is then

$$\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{2\beta(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{\omega^4 + 2\omega^2(\beta^2 - \alpha^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2}. \quad (1.2)$$

The probability density function (pdf) of $X(t)$, conditioned on $X(0) = x_0 = 0$, is given by

$$f_X(x, t|x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[1 - \gamma^2(t)]}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2[1 - \gamma^2(t)]}\right\}, \quad (1.3)$$

which admits the standard normal pdf as its steady-state limit.

The possibility of implementing Franklin's algorithm rests on the circumstance that (1.2) is a rational function, the degree of the polynomial in the denominator being larger than that of the numerator.

2. SIMULATION RESULTS

2.1 A SUMMARY OF EARLIER RESULTS FOR THE SINGLE BOUNDARY CASE

According to the values of boundary S and of the covariance parameters in (1.2), the first passage time (FPT) pdf $g(t)$ exhibits a unimodal, a bimodal or a multimodal behavior. In the following, we summarize the main results obtained in [1].

- a) For large values of β , implying a fast damping of $\gamma(t)$, $g(t)$ is unimodal. Indeed, as β increases the process exhibits a behavior very similar to that of the Ornstein-Uhlenbeck process, whose FPT density through a constant boundary is known to be unimodal.

- b) For small values of β the effect of the periodic component of the covariance emerges, so that $g(t)$ exhibits some peaks, at times periodically spaced. Whenever the visible peaks are more than two, the first two peaks are characterized by amplitudes largely exceeding those of the other peaks. Each visible peak is located at a distance $P/2 = \pi/\alpha$ from the adjacent ones.
- c) For increasing values of S , namely as the boundary is progressively removed, the number of visible peaks increases while $g(t)$ goes to zero less rapidly. This is due to the decrease of the boundary crossing probability for small times as the boundary is made large.
- d) For large values of α the oscillatory component of the covariance plays a progressively more important role, which is responsible for the multimodal outlook of $g(t)$.

To summarize, the parameter β characterizes the time interval during which $g(t)$ is appreciably non-vanishing, while the parameter α regulates the periodic component of $g(t)$. Finally, for a fixed α and an increasing β , or for a fixed β and a decreasing α , the covariance $\gamma(t)$ given by (1.1) approaches that of the Ornstein-Uhlenbeck process, so that $g(t)$ tends to exhibit a unique peak.

2.2 TWO BOUNDARIES

2.2.1 PRELIMINARY REMARKS AND A COMPARISON WITH WIENER PROCESS

Let S_1 and S_2 be constant boundaries with $S_1 < x_0 < S_2$ and let

$$g^+ \equiv g^+(t) = \frac{\partial}{\partial t} P \left\{ \inf_{t \geq 0} [t : X(t) > S_2; X(\theta) > S_1, \forall \theta \in (0, t) | X(0) = 0] \right\}$$

$$g^- \equiv g^-(t) = \frac{\partial}{\partial t} P \left\{ \inf_{t \geq 0} [t : X(t) < S_1; X(\theta) < S_2, \forall \theta \in (0, t) | X(0) = 0] \right\}$$

be the FPT densities through S_2 and through S_1 , respectively. Hence, $g \equiv g(t) = g^+(t) + g^-(t)$ is the FPT density through either boundaries (cf. Buonocore *et al.* [2]). Henceforth, we shall take $S_2 \equiv S > 0$ and $S_1 = -S$.

From our simulations, the following conclusion emerges: in all observed cases the presence of the second boundary causes an increase of the maxima of g (see Figures 1 and 2).

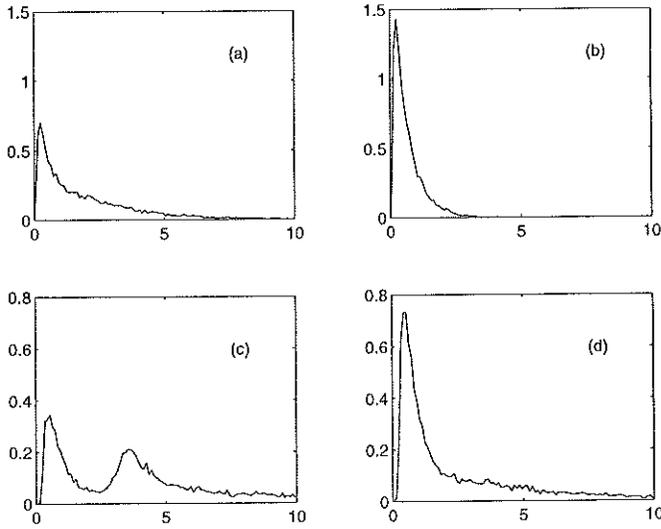


Figure 1: For $\alpha = 1$ and $\beta = 1$ experimental densities $g(t)$ are plotted with a single threshold $S = 1$ in (a) and with the pair of thresholds $S_{1,2} = \pm 1$ in (b). For $\alpha = 1$ and $\beta = 0.1$, densities $g(t)$ are plotted with $S = 1$ in (c) and with $S_{1,2} = \pm 1$ in (d).

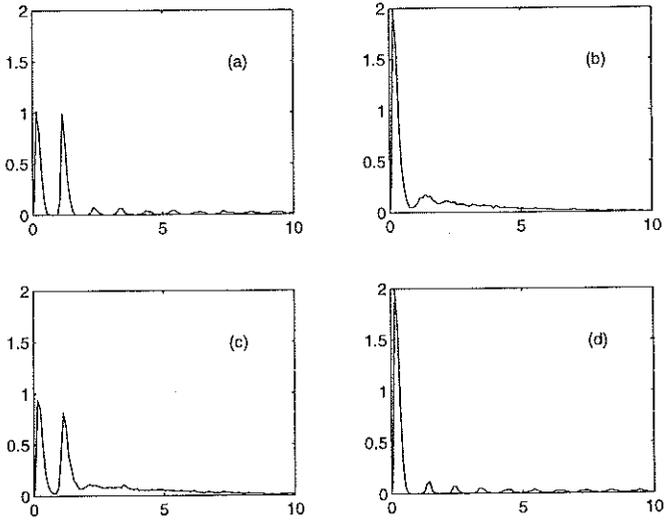


Figure 2: For $\alpha = \pi$ and $\beta = 0.1$ experimental densities $g(t)$ are plotted with $S = 1$ in (a) and with $S_{1,2} = \pm 1$ in (b). For $\alpha = \pi$ and $\beta = 0.01$, densities $g(t)$ are plotted with $S = 1$ in (c) and with $S_{1,2} = \pm 1$ in (d).

Table 1 indicates the considered values of parameters and boundaries.

α	β	<i>Boundaries</i>			
1	1	± 0.5	± 1	± 2	± 3
1	0.5	± 0.5	± 1	± 2	± 3
1	0.1	± 0.5	± 1	± 2	
1	0.01	± 0.5	± 1	± 2	
π	0.1	± 0.5	± 1	± 2	± 3
π	0.01	± 0.5	± 1	± 2	± 3
$(2/3)\pi$	0.5	± 0.5	± 1	± 2	
$(2/7)\pi$	0.1	± 0.5	± 1	± 2	
2π	1	± 0.5	± 1	± 2	
2π	0.1	± 0.5	± 1	± 2	

Table 1

It is interesting to remark that a similar behavior is also exhibited by the standard Wiener process (cf. Figure 3) despite the fundamental diversities of the two processes. An analytical justification of the observed behavior of Wiener process is sketched in [4].

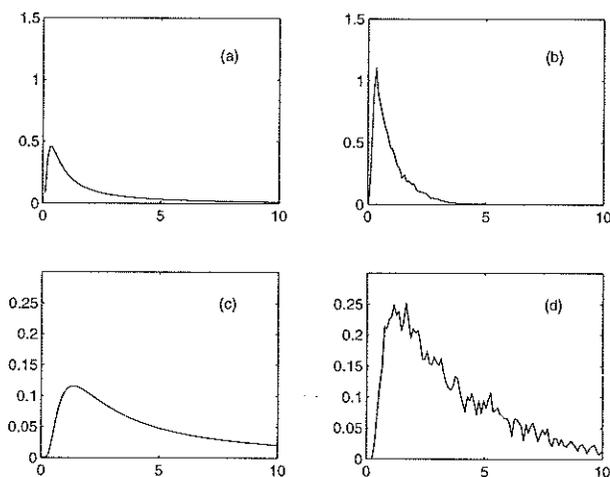


Figure 3: Standard Wiener process. FPT density $g(t)$ is plotted in (a) for $S = 1$, in (b) for $S_{1,2} = \pm 1$, in (c) for $S = 2$ and in (d) for $S_{1,2} = \pm 2$.

The second general remark is that densities g^+ and g^- individually exhibit a behavior that is qualitatively similar to that of g . Due to the

symmetry of the conditional pdf $f_X(x, t)$ with respect to the origin, our simulation results imply that values of g^+ and g^- are consistently a half of those of g (see Figures 4 and 5).

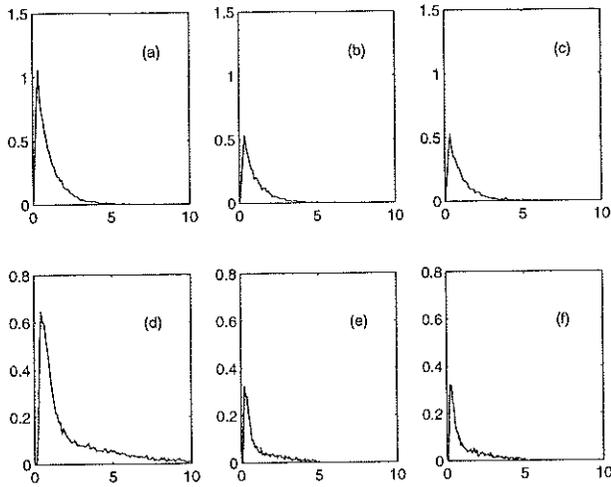


Figure 4: For $\alpha = 1$ and $\beta = 0.5$ experimental densities $g(t)$ are plotted with $S_{1,2} = \pm 1$ in (a), while $g^+(t)$ is shown in (b) and $g^-(t)$ in (c). In (d) ÷ (f) the same functions are plotted for $\alpha = (2/7)\pi$ and $\beta = 0.1$.

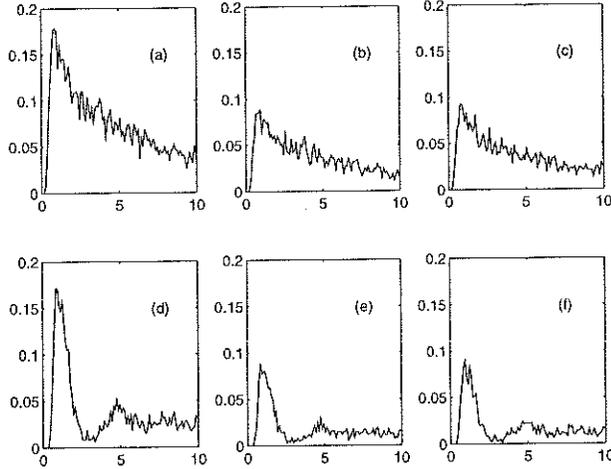


Figure 5: For $\alpha = 1$ and $\beta = 0.5$ experimental densities $g(t)$ are plotted with $S_{1,2} = \pm 2$ in (a), while $g^+(t)$ and $g^-(t)$ are shown in (b) and in (c), respectively. In (d) ÷ (f) the same functions are plotted for $\alpha = (2/7)\pi$ and $\beta = 0.1$.

The corresponding findings for the standard Wiener process are depicted in Figure 6.

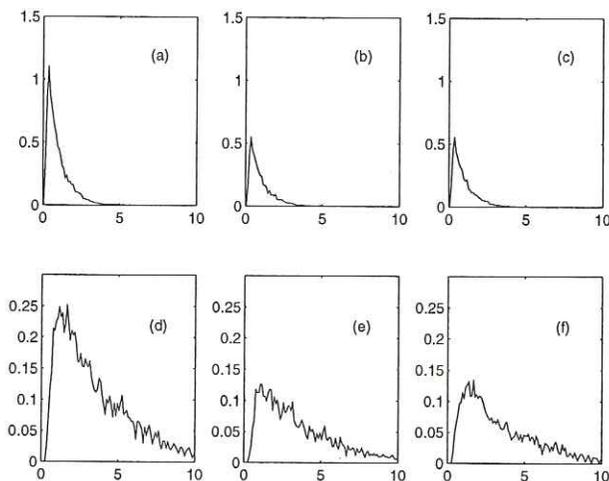


Figure 6: For the standard Wiener process density $g(t)$ is plotted in (a) for $S_{1,2} = \pm 1$ and in (d) for $S_{1,2} = \pm 2$. The corresponding densities $g^+(t)$ are shown in (b) and in (e), whereas densities $g^-(t)$ are plotted in (c) and in (f).

2.2.2 AN OUTLINE OF SPECIFIC SIMULATION RESULTS

We know that in the single boundary case for particular values of parameters α and β two peaks appear in the graph of the density $g(t)$. In the two-boundary case, for the same values of parameters this is no longer true: the function $g(t)$ exhibits only one large peak (see Figures 7 and 8). As these figures show, the presence of the second boundary, symmetric with respect to the origin, causes the disappearance of the second peak in $g(t)$. A heuristic explanation relies on the form of the covariance (1.1), implying that positively correlated values alternate with negatively correlated ones. Hence, if $\alpha = 1$ and β is very small, namely in the case of slow damping of the covariance function, during the time interval $(0, P/2)$ the covariance monotonically decreases from the value $\gamma(0) = 1$ to the value $\gamma(P/2) = e^{-\beta T/2} \cos(\pi) \approx -1$. In $(0, P/4)$, sample paths are positively correlated; since the covariance is large, if initially an upper crossing occurs, such a crossing tends to persist. We thus conclude that the presence of a

unique larger peak is to be expected for the pdf of $X(t)$ in the two-boundary case, as suggested by the afore-mentioned simulation results.

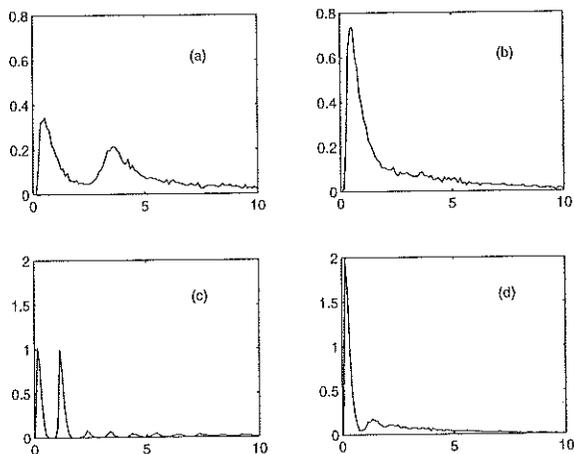


Figure 7: For $\alpha = 1$ and $\beta = 0.01$ experimental densities $g(t)$ are plotted with $S = 1$ in (a) and with $S_{1,2} = \pm 1$ in (b). For $\alpha = \pi$ and $\beta = 0.01$ densities $g(t)$ are plotted with $S = 1$ in (c) and with $S_{1,2} = \pm 1$ in (d).

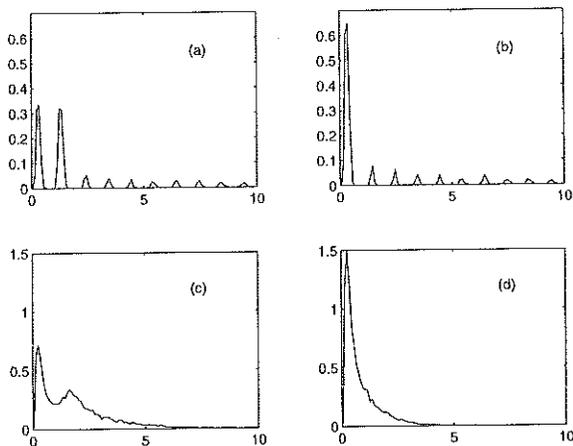


Figure 8: For $\alpha = \pi$ and $\beta = 0.01$ experimental densities $g(t)$ are plotted with $S = 2$ in (a) and with $S_{1,2} = \pm 2$ in (b). For $\alpha = 2\pi/3$ and $\beta = 0.5$ densities $g(t)$ are plotted with $S = 1$ in (c) and with $S_{1,2} = \pm 1$ in (d).

Let us now focus our attention on some particular cases.

Case 1. Let S_1, S_2 be fixed. If β is larger enough (fast damping) and if the boundaries are sufficiently close to the origin (for instance $S_{1,2} = \pm 0.5$ as in Figures 9 and 10), similarly to the case of Wiener process $g(t)$ is unimodal.

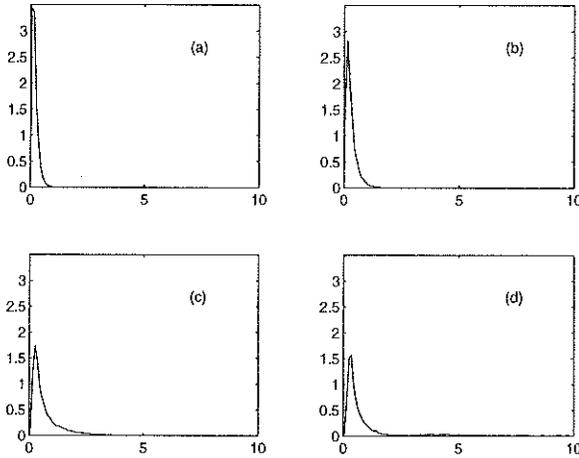


Figure 9: For $S_{1,2} = \pm 0.5$ and $\alpha = 1$ experimental densities $g(t)$ are plotted with $\beta = 1$ in (a), with $\beta = 0.5$ in (b), with $\beta = 0.1$ in (c) and with $\beta = 0.01$ in (d).

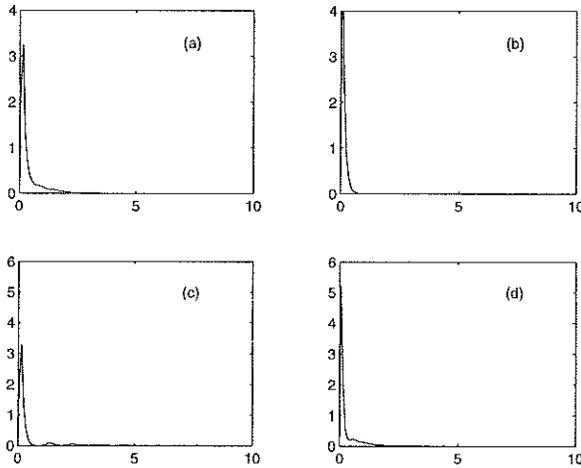


Figure 10: For $S_{1,2} = \pm 0.5$ and $\alpha = \pi$ experimental densities $g(t)$ are plotted with $\beta = 0.1$ in (a) and with $\beta = 0.01$ in (b). For the same boundaries and for $\alpha = 2\pi$ densities $g(t)$ are plotted with $\beta = 1$ in (c) and with $\beta = 0.1$ in (d).

As β decreases (slow damping), similarly to the single-boundary case the effect of the periodic component of the covariance starts showing up. This already occurs for $S_{1,2} = \pm 1$. It should be pointed out that now values of β can be less than those required for the single-boundary case.

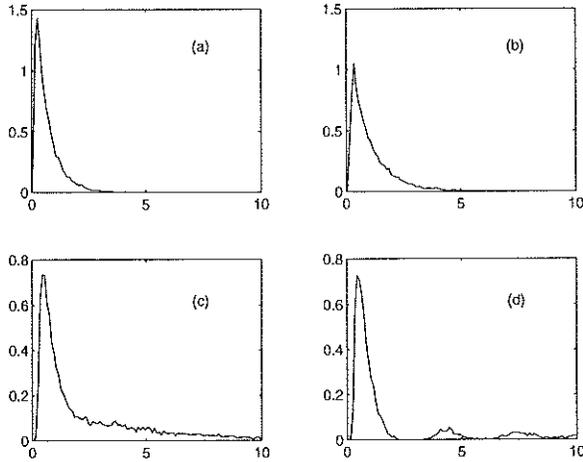


Figure 11: For $S_{1,2} = \pm 1$ and $\alpha = 1$ experimental densities $g(t)$ are plotted with $\beta = 1$ in (a), with $\beta = 0.5$ in (b), with $\beta = 0.1$ in (c) and with $\beta = 0.01$ in (d).

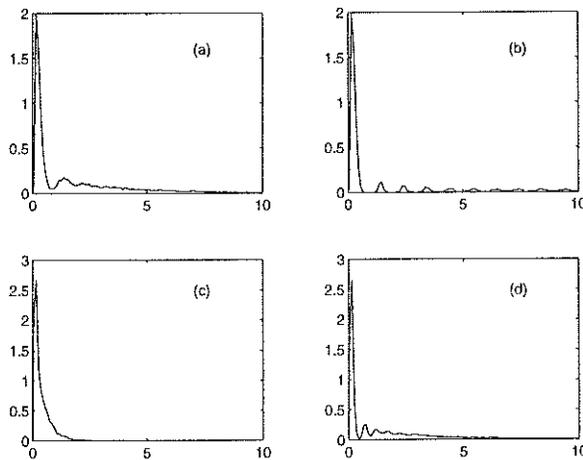


Figure 12: For $S_{1,2} = \pm 1$ and $\alpha = \pi$ experimental densities $g(t)$ are plotted with $\beta = 0.1$ in (a) and with $\beta = 0.01$ in (b). For the same boundaries and for $\alpha = 2\pi$ densities $g(t)$ are plotted with $\beta = 1$ in (c) and with $\beta = 0.1$ in (d).

For instance, for $S_{1,2} = \pm 1, \alpha = 1$ and $\beta = 0.1$, $g(t)$ is unimodal as shown by Fig. 11(a). Only as β becomes less than 0.01, namely for a rather small damping, other peaks appear in the graph of $g(t)$, as shown, for instance, by Fig. 11(d). With the same boundaries, if α is increased smaller values of β are necessary to obtain multiple peaks. For instance, for $S_{1,2} = \pm 1$ and $\alpha = \pi$ multiple peaks appear for $\beta = 0.01$ (cf. Fig. 12(b)). Let us remark that if $\alpha = 1, \beta = 0.5$ and $S = \pm 1$ (cf. Fig. 11(b)), the maximum of $g(t)$ approximately equals that of FPT pdf of the Wiener process (cf. Fig. 3(b)). This is due to the shape of the conditional pdf of $X(t)$. Indeed, $\cos^2(\alpha t) \approx 1$ for small t , so that

$$\gamma^2(t) = \left[\exp(-2\beta t) \cos^2(\alpha t) \right]_{\alpha=1, \beta=0.5} \approx 1 - t,$$

and thus

$$f_X(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right),$$

the latter being the conditional pdf of the standard Wiener process.

For a fixed β , as α increases $g(t)$ exhibits periodic components due to the frequency increase of covariance oscillations (cf. Figures 11 and 12).

Case 2. Locations of boundaries are changed. For fixed β and α , as $S_{1,2}$ increase the first maximum of $g(t)$ rapidly goes down (compare figures 11(a) and 11(b) with figures 13(a) and 13(b)), while other maxima increase (compare figure 11(d) with 13(d) and figure 12(b) with 14(b)). Moreover, the number of visible peaks increases as compared to that of boundaries at ± 0.5 and ± 1 . Such a circumstance becomes particularly evident if the periodic component of the covariance function is not excessively damped due to large values of β . Like as in the single-boundary case, each visible peak is set at a distance $P/2 = \pi/\alpha$ from the adjacent ones. This is to be expected, as for not too large values of t the r.v. $X(t)$, conditioned on $X(0) = 0$, is approximately $N(0, 1 - \gamma^2(t))$. Hence, its variance

$$D^2(t) = 1 - \exp(-2\beta t) \cos^2(\alpha t),$$

oscillates with a period $P/2 = \pi/\alpha$. In the time interval during which $D^2(t)$ is large, the process undergoes rapid fluctuations so that boundary crossings are very likely. Figures 13 and 14 clearly show that, to

a good degree of approximation, the abscissae t_k of the peaks of $g(t)$ are given by $t_k = P/4 + kP/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), which correspond to the maxima of $D^2(t)$ (cf. [1]). However, the above explanation can be considered as acceptable only for small times.

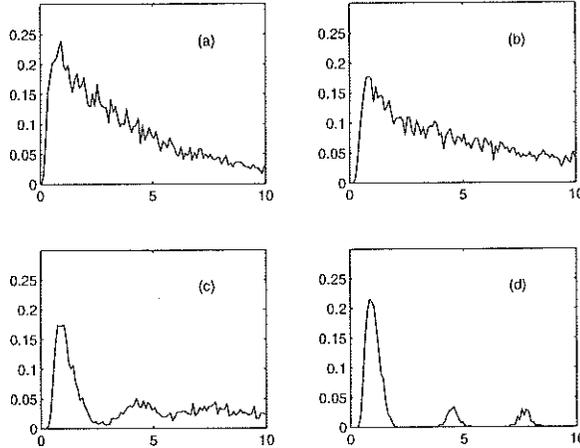


Figure 13: For $S_{1,2} = \pm 2$ and $\alpha = 1$ experimental densities $g(t)$ are plotted with $\beta = 1$ in (a), with $\beta = 0.5$ in (b), with $\beta = 0.1$ in (c) and with $\beta = 0.01$ in (d).

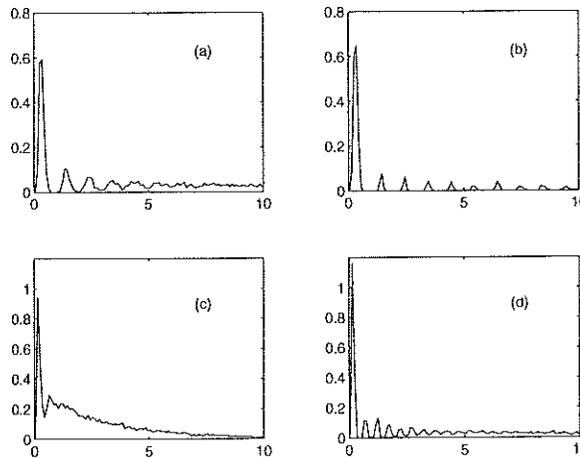


Figure 14: For $S_{1,2} = \pm 2$ and $\alpha = \pi$ experimental densities $g(t)$ are plotted with $\beta = 0.1$ in (a) and with $\beta = 0.01$ in (b). For the same boundaries and $\alpha = 2\pi$ densities $g(t)$ are plotted with $\beta = 1$ in (c) and with $\beta = 0.1$ in (d).

We stress the two-boundary case differs relevantly from the single-boundary one. Indeed, in the latter the first two peaks have approximately the same height, while in the former one larger peak is observed.

Finally, we have simulated the processes setting the boundaries at ± 3 . In this case, running times are much longer than those of the previously mentioned cases (boundaries at $\pm 0.5, \pm 1, \pm 2$). This is due to the circumstance that high probability transition region lies between 2 and -2 , as seen in [4]. Some examples of densities $g(t)$ for $S_{1,2} = \pm 3$ are plotted in Figure 15.

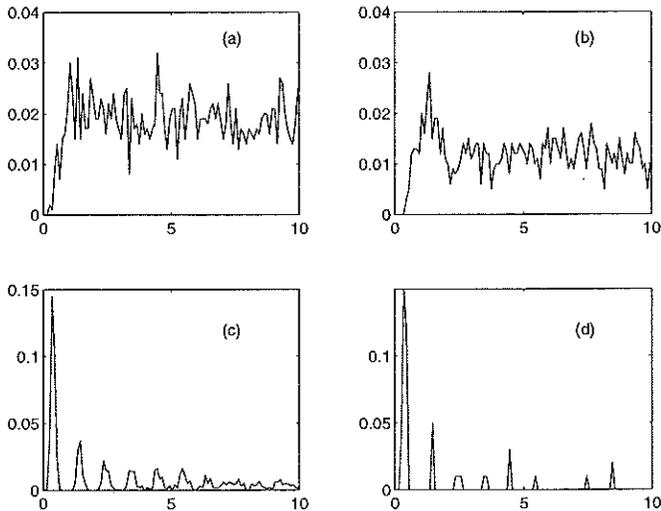


Figure 15: For $S_{1,2} = \pm 3$ and $\alpha = 1$ experimental densities $g(t)$ are plotted with $\beta = 1$ in (a) and with $\beta = 0.5$ in (b). For the same boundaries and for $\alpha = \pi$ densities $g(t)$ are plotted with $\beta = 0.1$ in (c) and with $\beta = 0.01$ in (d).

A clear indication of our simulation results is that in the single-boundary case β characterizes the time interval during which $g(t)$ is non vanishing, while in the two-boundary case such a time interval also depends on how close to each other the boundaries are: the closer the boundaries to the origin, the shorter this time interval becomes.

REFERENCES

- [1] Buonocore A., Di Crescenzo A., Iardino F., Nakamura A., Ricciardi L.M. and Rinaldi S. (1992) *A Vectorized Simulation Procedure for Computations of First Crossing Time Densities of Normal Processes with Oscillatory Covariance*. Rapporto Tecnico n. 1/93, Progetto finalizzato Sistemi informatici e Calcolo Parallelo, Sottoprogetto 1, Calcolo Scientifico per Grandi Sistemi.
- [2] Buonocore A., Giorno V., Nobile A.G. and Ricciardi L.M. (1990) *On the two-boundary first-crossing-time problem for diffusion processes*. J. Appl. Prob. **27**, 102-114.
- [3] Buonocore A. and Visentin F. (1992) *On the numerical evaluation of first-passage-time probability densities for one dimensional diffusion processes*. Ricerche di Matematica Vol. XLI, 147-161.
- [4] Di Nardo E., Pirozzi E. and Rinaldi S. (1996) *Sul tempo di primo passaggio per processi normali a covarianza oscillante*. Preprint n. 96, Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli studi di Napoli "Federico II".
- [5] Franklin J.N. (1965) *Numerical simulation of stationary and non stationary Gaussian random processes*. SIAM Review **7**, 68-80.
- [6] Ricciardi L.M. and Sato S. (1983) *A note on first passage time for Gaussian processes and varying boundaries*. IEEE Transactions on Information Theory **29**, 454-457.
- [7] Ricciardi L.M. and Sato S. (1986) *On the evaluation of first-passage-time densities for Gaussian processes*. Signal Processing **11**, 339-357.
- [8] Ricciardi L.M. and Sato S. (1990) *Diffusion processes and first-passage-time problems*. Lectures in Applied Mathematics and Informatics (Ricciardi L.M. ed.), 206-285. Manchester University Press, Manchester.

.....

